Zestaw 7

Zeszyt 3

Jacek Stańdo

Jak wykorzystać technologię w nauce funkcji i rachunku prawdopodobieństwa?

- Etapy wprowadzania pojęcia funkcji i włączania technologii informacyjno-komunikacyjnej
- Uczenie się przez odkrywanie
- Rachunek prawdopodobieństwa jako przykład funkcji

Analiza merytoryczna
Elżbieta Miterka

Recenzja
Jolanta Lazar

Redakcja językowa i korekta
Agata Jabłonowska-Turkiewicz

Projekt graficzny, projekt okładki
Wojciech Romerowicz, ORE

Skład i redakcja techniczna
Grzegorz Dębiński

Projekt motywu graficznego „Szkoły ćwiczeń”
Aneta Witecka

ISBN 978-83-65967-00-8 (Zestawy materiałów dla nauczycieli szkół ćwiczeń – matematyka)
ISBN 978-83-65967-28-2 (Zestaw 7. Wykorzystanie technologii informacyjno-komunikacyjnych w edukacji matematycznej w klasach IV–VIII szkoły podstawowej i szkole ponadpodstawowej)
ISBN 978-83-65967-31-2 (Zeszyt 3. Jak wykorzystać technologię w nauce funkcji i rachunku prawdopodobieństwa?)

Warszawa 2017
Ośrodek Rozwoju Edukacji
Aleje Ujazdowskie 28
00-478 Warszawa
www.ore.edu.pl

Spis treści

Wstęp

Już czasach starożytnych można odnaleźć początki rozwijania się pojęcia funkcji. Po raz pierwszy tego pojęcia użył w 1692 r. niemiecki matematyk Gottfried Wilhelm Leibniz. Formalna definicja pojawiła się w 1718 r. i stworzył ją szwajcarski matematyk Johann Bernoulli. Nowoczesne pojęcie funkcji w 1837 r. zdefiniował Peter Gustav Lejeune Dirichlet.

Funkcja to jedno z najważniejszych pojęć w matematyce.

Nie zdajemy sobie sprawy z tego, że wprowadzenie pojęcia funkcji i jej własności jest długotrwałym procesem. Formalna definicja i podstawowe własności funkcji pojawiają się obecnie w klasie VIII. Nauczyciele już na etapie wczesnoszkolnym powinni rozpocząć proces wprowadzenia tej ważnej definicji.

Etapy wprowadzania pojęcia funkcji i włączania technologii informacyjno-komunikacyjnej

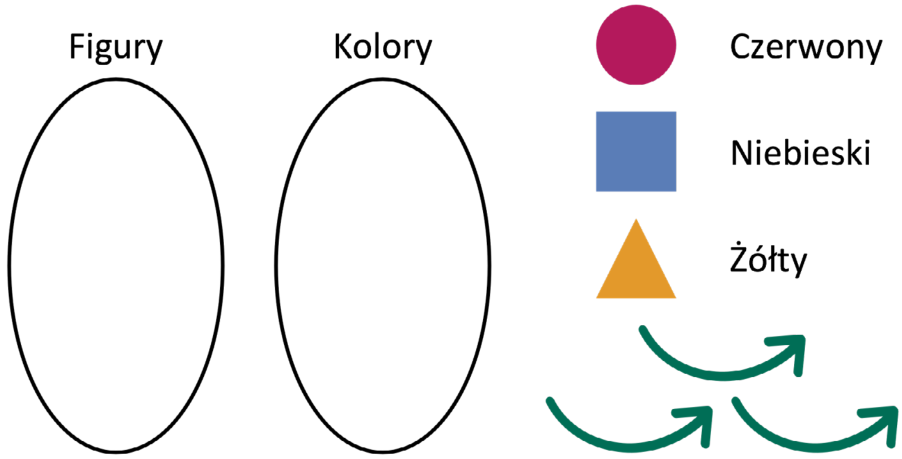
Etap 1

Budowanie zbiorów.
Na etapie wczesnoszkolnym uczniowie uczą się budowania zbiorów. Otaczanie pętlą różnych obiektów to dla ucznia rozdzielanie ich i łączenie w pewną całość ze względu na ustaloną cechę.

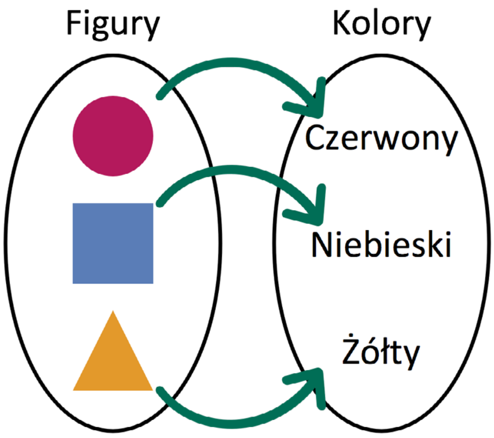
Etap 2

Przyporządkowania podstawowe.

Ćwiczenie
Włóż odpowiednie elementy do zbioru i przyporządkuj figurom właściwy kolor.

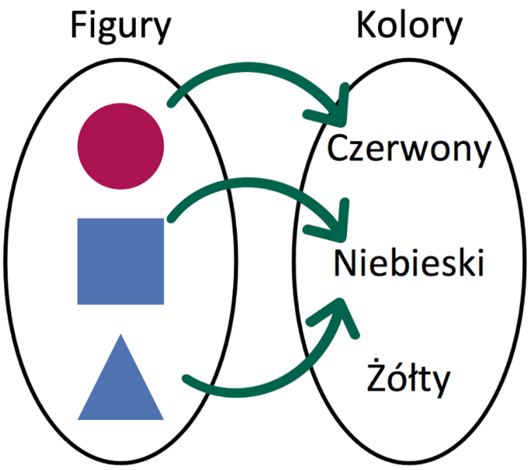


Rozwiązanie

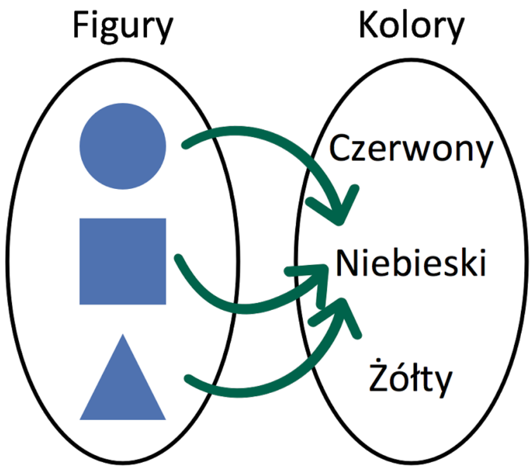


Przykłady, na których uczniowie dokonują przyporządkowania, muszą być naturalne, wzięte z życia (figura–kolor, warzywa–cena).

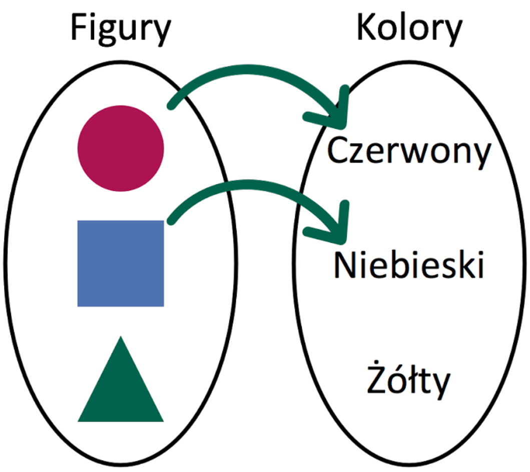
A


Figury
Kolory
Czerwony
Niebieski
Żółty

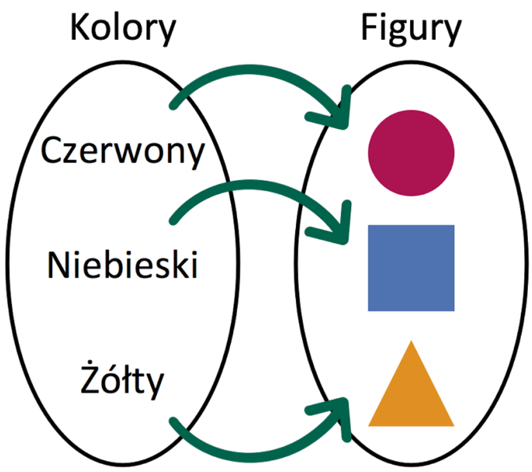
B


Figury
Kolory
Czerwony
Niebieski
Żółty

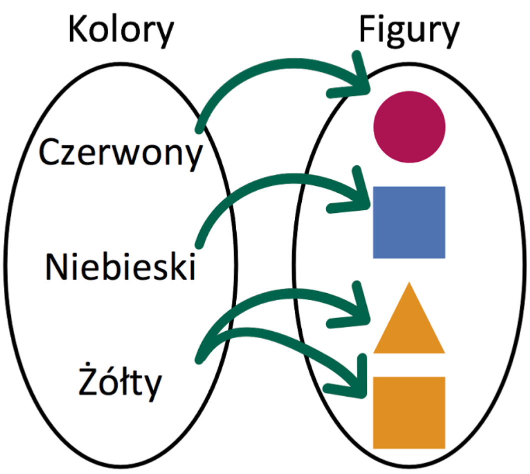
C


Figury
Kolory
Czerwony
Niebieski
Żółty

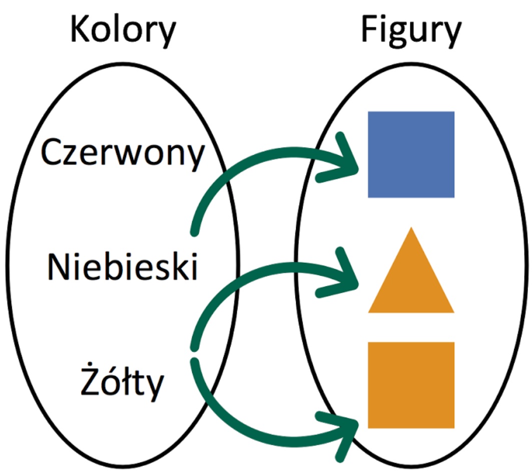
D


Kolory
Figury
Czerwony
Niebieski
Żółty

E


Kolory
Figury
Czerwony
Niebieski
Żółty

F


Kolory
Figury
Czerwony
Niebieski
Żółty

a) W przyporządkowaniu dwie figury mają przypisany ten sam kolor, brak figury o kolorze żółtym.

b) W przyporządkowaniu wszystkie figury mają przypisany jeden kolor i ze względu na brak figur nie wszystkie kolory występują.

c) W zbiorze kolorów brak koloru zielonego, figura nie ma przyporządkowania.

d) Możemy rozważać przyporządkowania odwrotne.

e) Kolor żółty ma przyporządkowane dwie figury.

f) Kolor żółty ma przyporządkowane dwie figury.

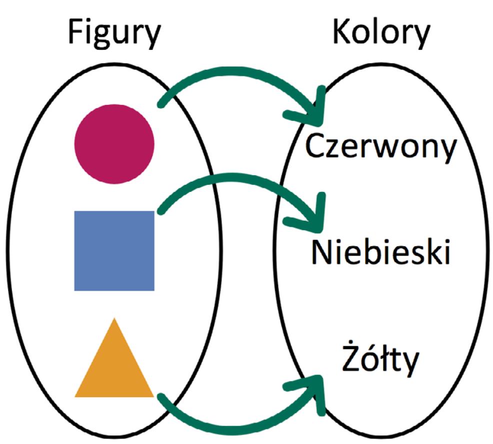
Celem rozważania powyższych przypadków jest to, aby uczniowie, kiedy zostanie im wprowadzone pojęcie funkcji, potrafili dokonać zróżnicowania:

- funkcji i przyporządkowania, które nie jest funkcją;
- funkcji stałej;
- funkcji różnowartościowej;
- funkcji „na”;
- funkcji odwrotnej.

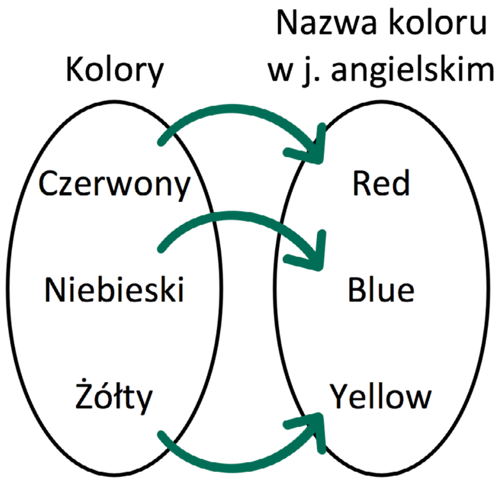
Etap 4

Przyporządkowanie złożone.

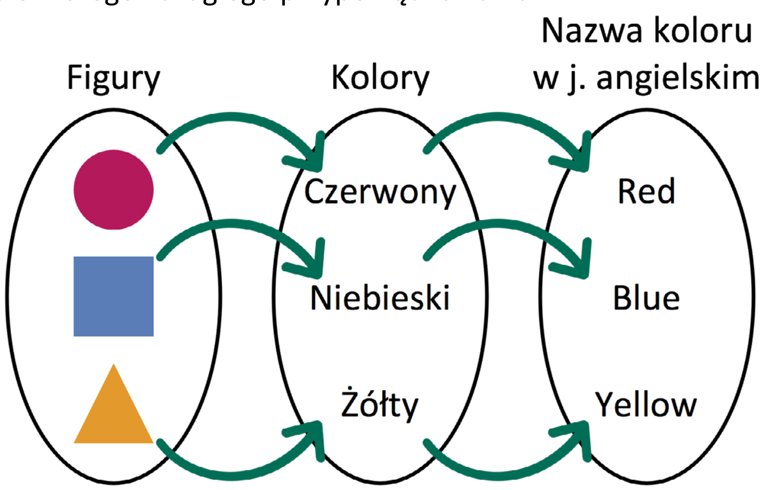
Krok 1. Konstrukcja pierwszego przyporządkowania.



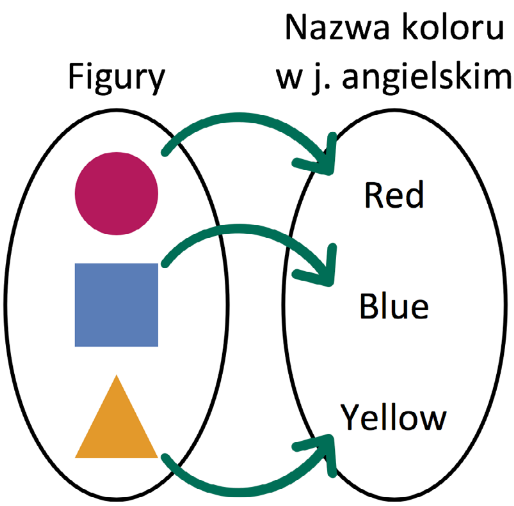
Krok 2. Konstrukcja drugiego przyporządkowania.



Krok 3. Złożenia pierwszego i drugiego przyporządkowania



Krok 4. Konstrukcja złożonego przyporządkowania.



Etap 5

Wprowadzenie definicji funkcji.

Etap 6

Własności funkcji, interpretacja funkcji, budowanie różnych funkcji.

Uczenie się przez odkrywanie

Wincenty Okoń definiuje metodę kształcenia jako „wypróbowany i systematycznie stosowany układ czynności nauczycieli i uczniów, realizowanych świadomie w celu spowodowania założonych zmian w osobowości uczniów” (1999).

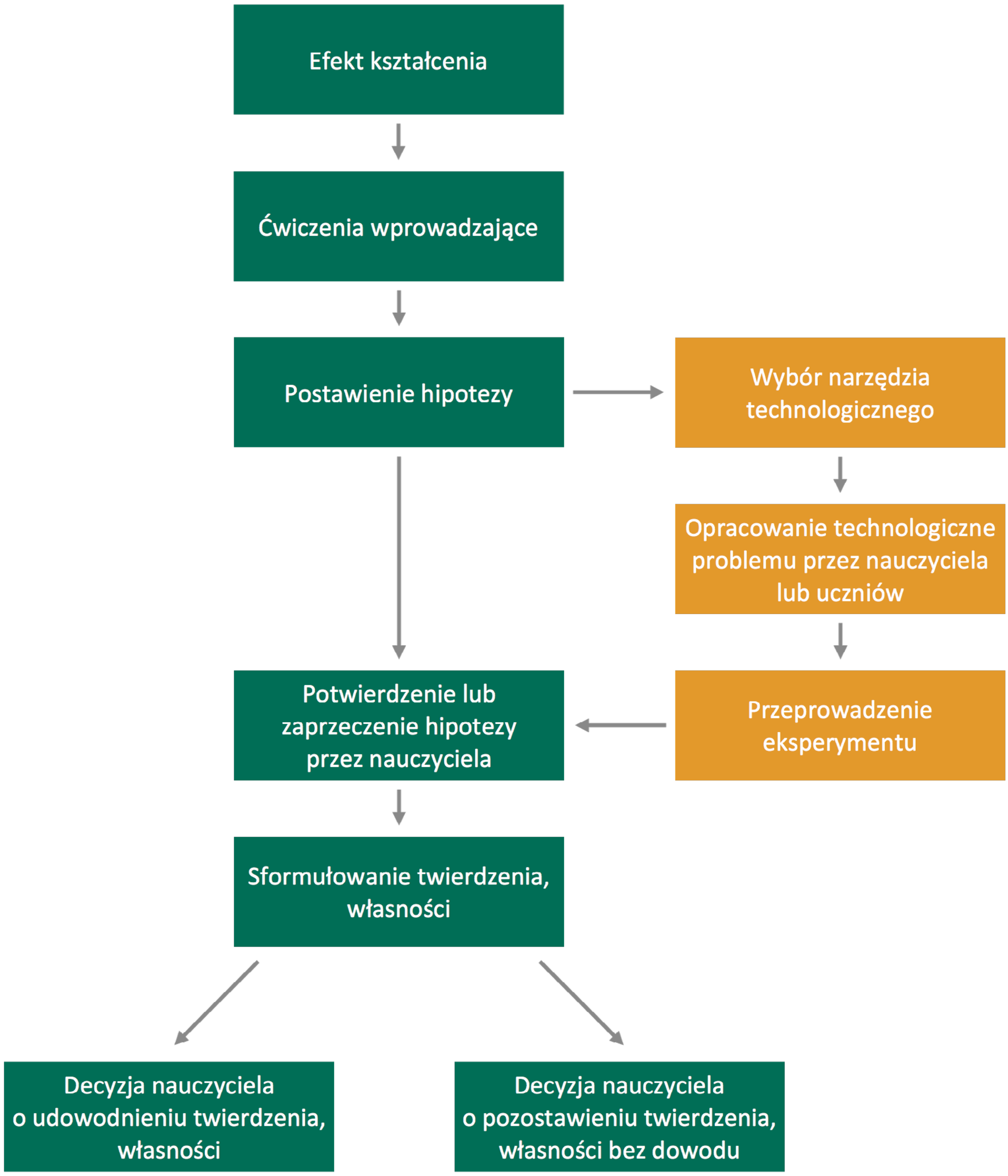
Typologia metod kształcenia (W. Okoń, 1999):

- metody asymilacji wiedzy – oparte na aktywności poznawczej;
- metody samodzielnego dochodzenia do wiedzy – oparte na twórczej aktywności poznawczej;
- metody waloryzacyjne – o dominacji aktywności emocjonalnej;
- metody praktyczne – aktywności praktycznej.

J.S. Bruner twierdzi, że proces poznawania świata polega na dostrzeganiu różnic między obiektami oraz łączeniu obiektów w pewne klasy. Zachęca on do uczenia się przez eksperymentowanie, stawianie hipotez, ale przestrzega przed wczesnym formalizmem, wprowadzaniem pojęć naukowych. J.S. Bruner twierdzi także, że prawdziwe uczenie się zachodzi w procesie samodzielnego dokonywania odkryć (por. Filipiak, 2011).

Uczenie się przez odkrywanie odgrywa najważniejszą rolę w nauczaniu matematyki. Należy stwarzać takie warunki, aby uczniowie mieli satysfakcję z uczenia się tego przedmiotu. Technologie informacyjno-komunikacyjne dają nieskończone możliwości wdrażania tej metody.

Na przykładach pokażemy, jak można włączyć narzędzia technologiczne w proces nauczania.


Efekt kształcenia
Ćwiczenia wprowadzające
Postawienie hipotezy
Wybór narzędzia technologicznego
Opracowanie technologiczne problemu przez nauczyciela lub uczniów
Przeprowadzenie eksperymentu
Potwierdzenie lub zaprzeczenie hipotezy przez nauczyciela
Sformułowanie twierdzenia, własności
Decyzja nauczyciela o udowodnieniu twierdzenia, własności
Decyzja nauczyciela o pozostawieniu twierdzenia, własności bez dowodu

Funkcja liniowa

Efekty kształcenia

Uczeń:

- tworzy wykres funkcji; wyznacza wartości funkcji;
- operuje własnościami funkcji.

Efekt kształcenia: Uczeń interpretuje współczynnik b przy równaniu funkcji liniowej $y = ax + b$, gdzie a jest ustalone.

Ćwiczenia wprowadzające

Praca w grupach

Grupa 1

Zadanie 1. Narysuj wykres funkcji $f(x) = 2x + 1$.

Zadanie 2. Narysuj wykresy funkcji $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = 2x + 3$.

Grupa 2

Zadanie 1. Narysuj wykres funkcji $f(x) = -x + 1$.

Zadanie 2. Narysuj wykresy funkcji $f(x) = -x + 2$, $g(x) = -x + 5$.

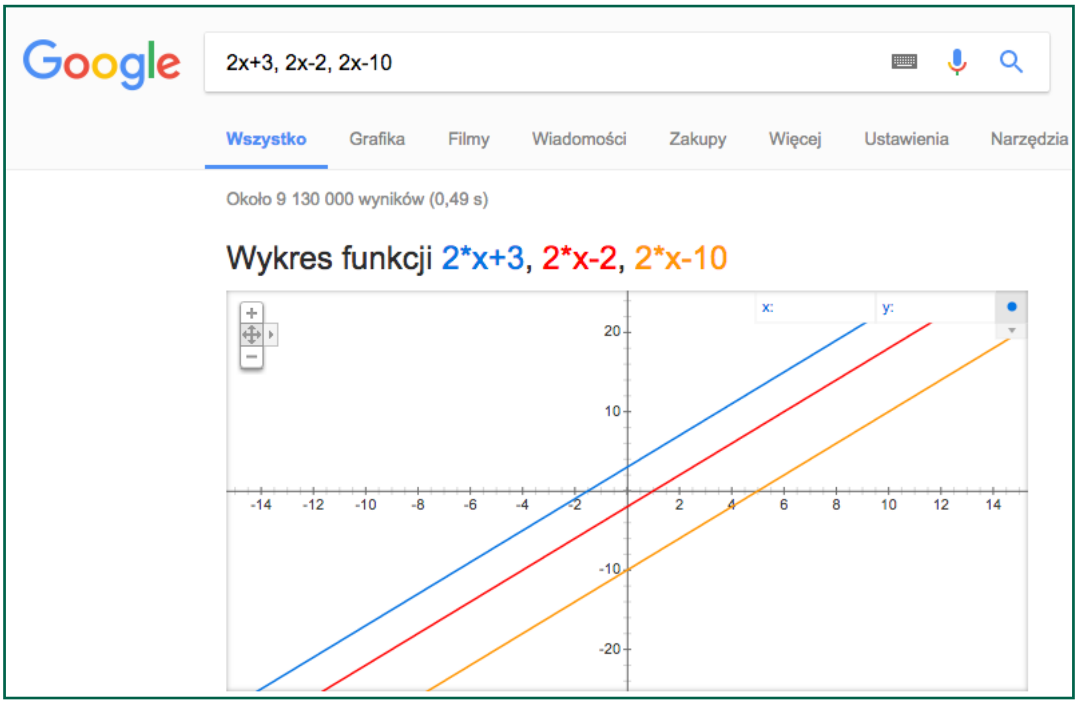
Postawienie hipotezy

Uczeń stawia hipotezę: Jeśli współczynniki a przy x są równe, to zmieniając współczynnik b, otrzymujemy proste równoległe.

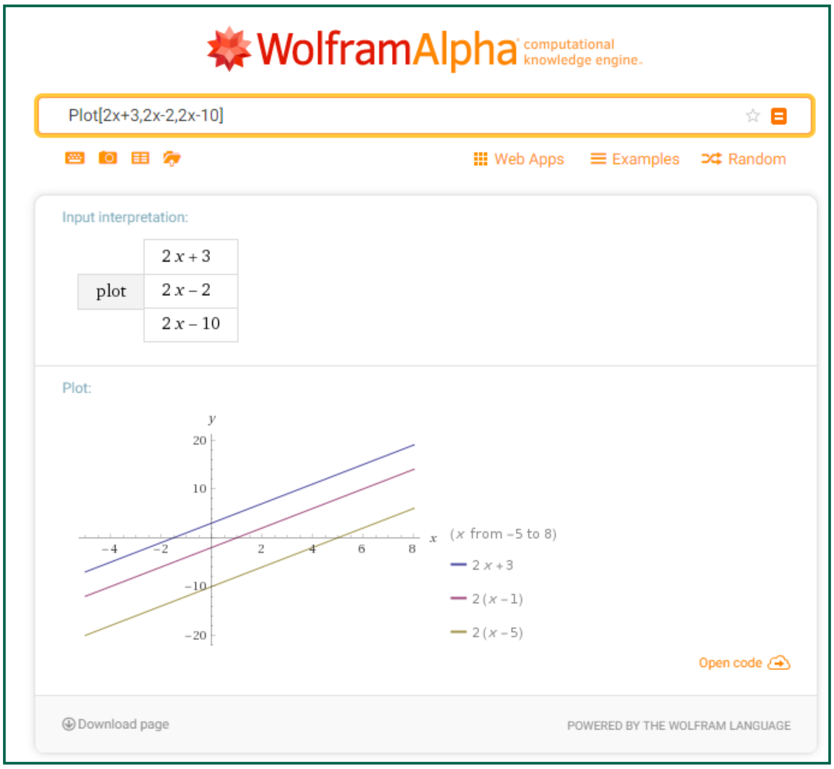
Jakie technologie możemy użyć, aby nasza hipoteza stała się bardziej wiarygodna?

Wybór narzędzia technologicznego, opracowanie technologiczne, przeprowadzenie eksperymentów

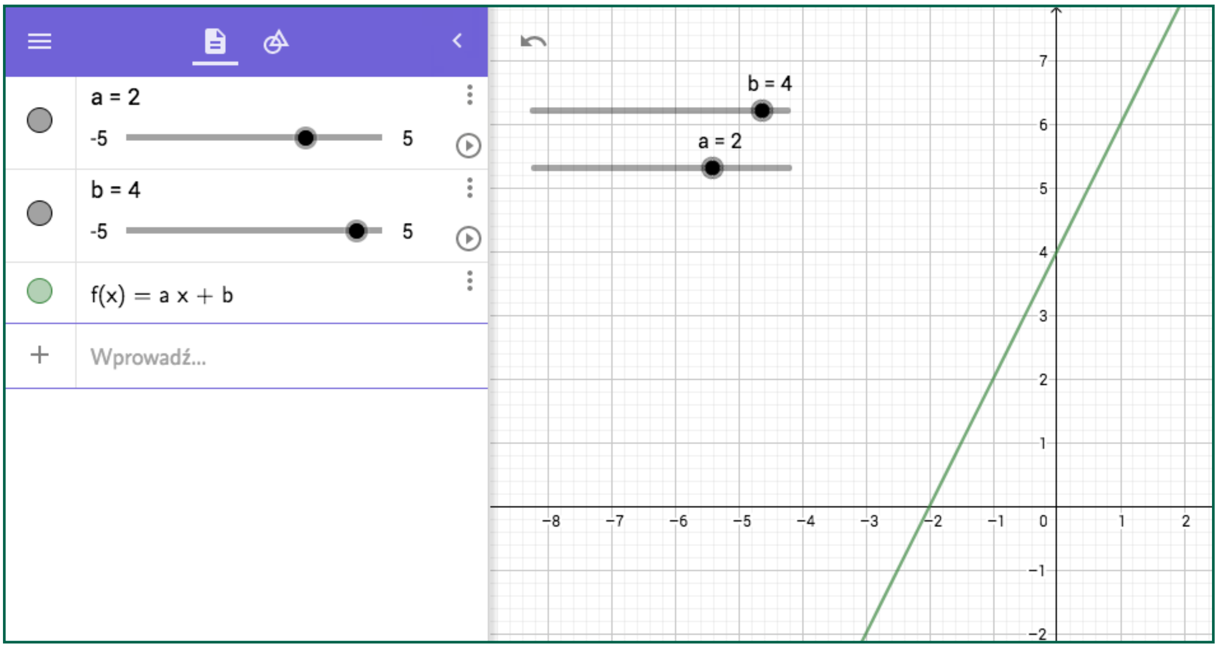
Wyszukiwarka Google



Wyszukiwarka Wolfram Alpha



GeoGebra



Które narzędzie jest najlepsze do rozwiązania naszego problemu?

Wyszukiwarki Google i Wolfram Alpha dają możliwość narysowania kilku wykresów.
W programie GeoGebra definiujemy suwak (zmienna b) i mamy możliwość symulowania prostych dla bardzo dużej ilości prostych.

Potwierdzenie hipotezy i sformułowanie własności

Jeśli współczynniki a przy x są równe, to zmieniając współczynnik b, otrzymujemy proste równoległe.

Uczeń zdolny:

Potrafi przygotować i zaprezentować dowód tego twierdzenia.

Przykłady efektów kształcenia, które można w podobny sposób realizować. Uczeń:

- interpretuje współczynnik a przy równaniu funkcji liniowej $y = ax + b$, gdzie b jest ustalone;
- określa monotoniczność funkcji liniowej;

interpretuje współczynnik a przy równaniu funkcji $y = ax\hat{}2 + bx + c + b$, gdzie b, c jest ustalone;

- interpretuje współczynnik c przy równaniu funkcji $y = ax\hat{}2 + bx + c + b$, gdzie a, b jest ustalone;

- interpretuje współczynnik b przy równaniu funkcji $y = ax\hat{}2 + bx + c + b$, gdzie a, c jest ustalone;

Rozwiązywanie układów równań

Jedną z metod rozwiązywania układów równań liniowych jest metoda graficzna. Metoda ta polega na narysowaniu wykresów funkcji liniowych wyznaczonych z równań.

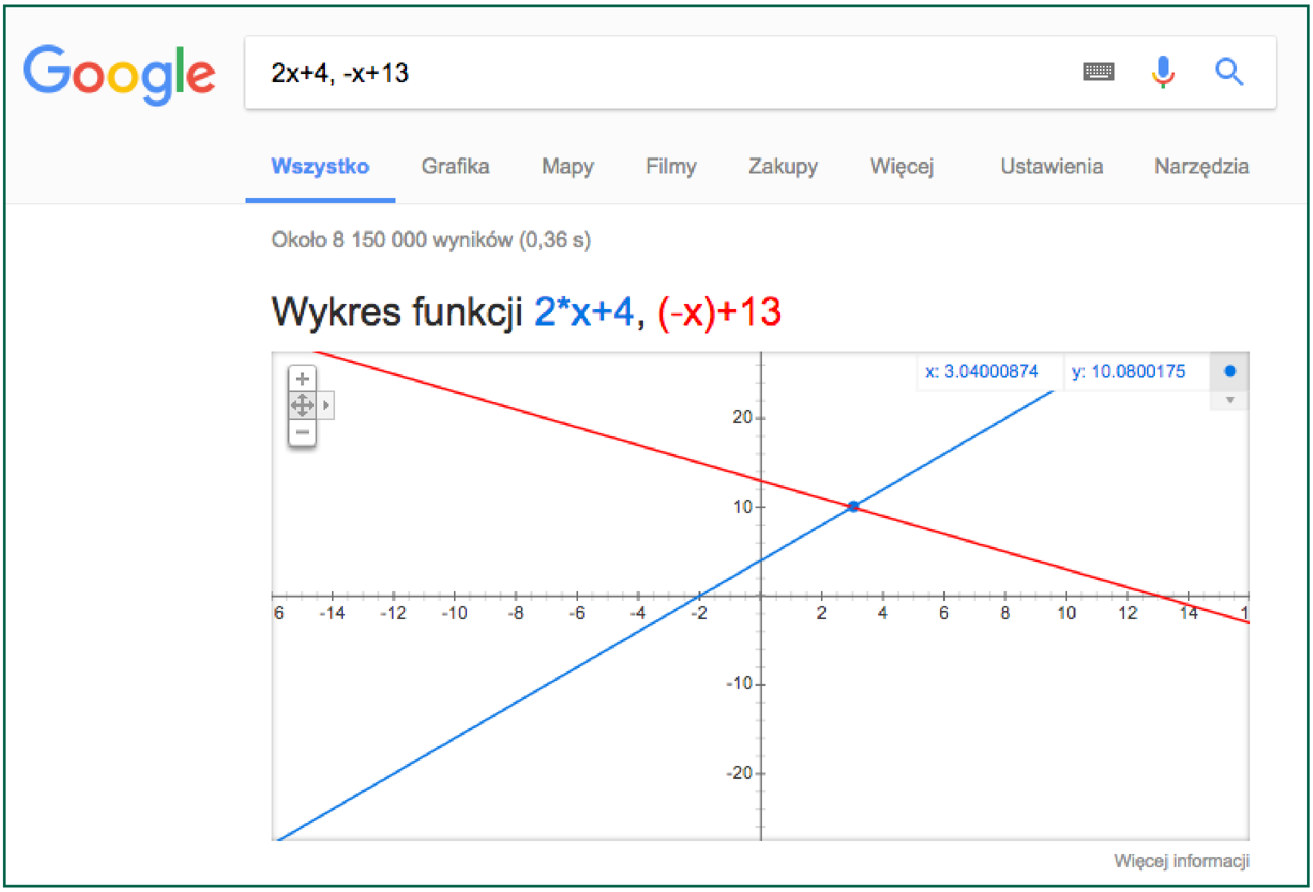
Ważne jest, aby uczniom uświadomić różnicę między równaniem $y = 2x + 4$ a funkcją $y = 2x + 4$

Warto, wprowadzając ten temat, przypomnieć i przeanalizować definicję funkcji, równania i rozwiązania równania.

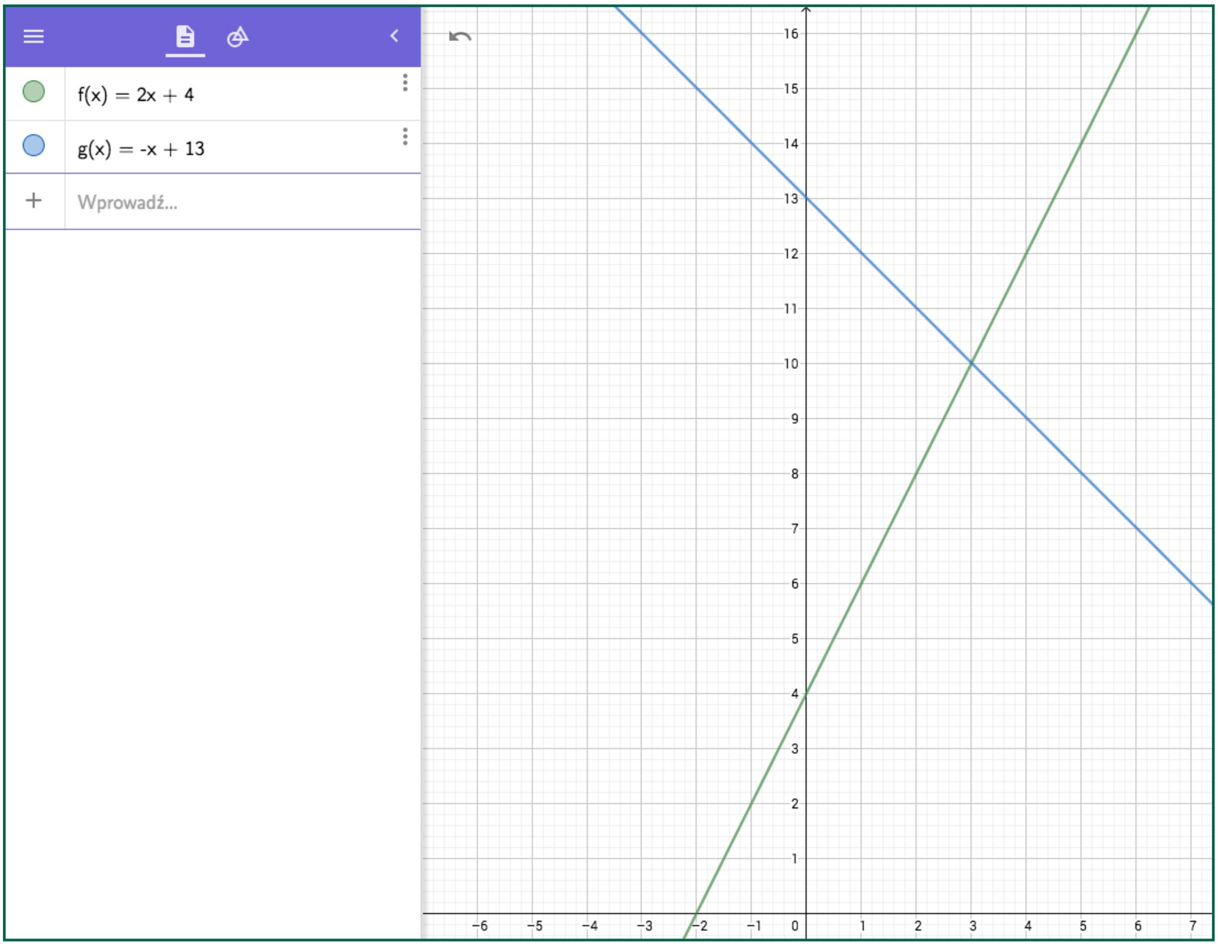
Graficzna metoda polega na doprowadzeniu równania $ax + by = c$ do postaci $y = cx + d$, a następnie narysowania go w układzie współrzędnych w tej prostej. W miejscu przecięcia się prostych znajduje się rozwiązanie układu równań.

Jakich narzędzi możemy użyć?

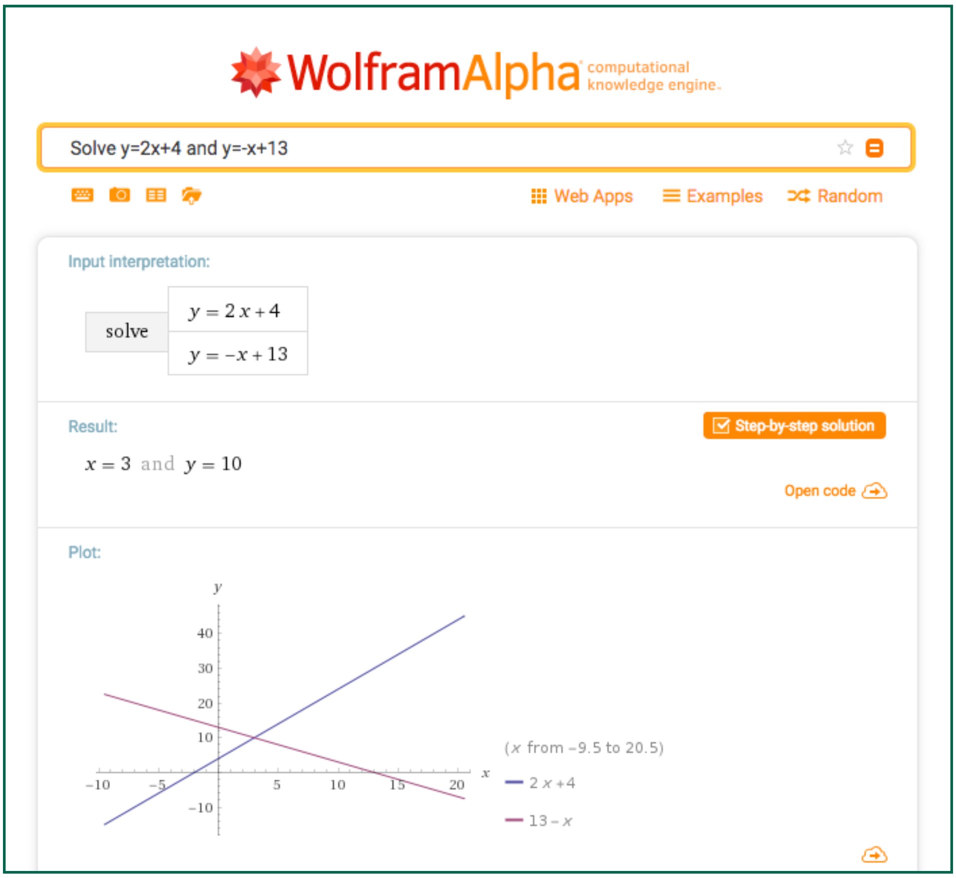
Wyszukiwarka Google



Program GeoGebra



Wolfram Alpha



W metodzie graficznej należy uwzględnić wszystkie przypadki:

- rozwiązaniem jest punkt;
- rozwiązaniem jest zbiór pusty (proste równoległe);
- rozwiązaniem jest zbiór punktów leżących na prostej (proste pokrywają się).

Jakie oczekujemy efekty kształcenia?

Uczeń:

- stosuje technologię do rysowania wykresów funkcji liniowych;
- rozwiązuje układ równań metodą graficzną;
- interpretuje rozwiązania metodą graficzną;
- wymienia wady i zalety metody graficznej.

Rachunek prawdopodobieństwa jako przykład funkcji

Wyznaczenie liczby podzbiorów k-elementowych w zbiorze n-elementowym jest obszarem działu matematyki nazywanym kombinatoryką.

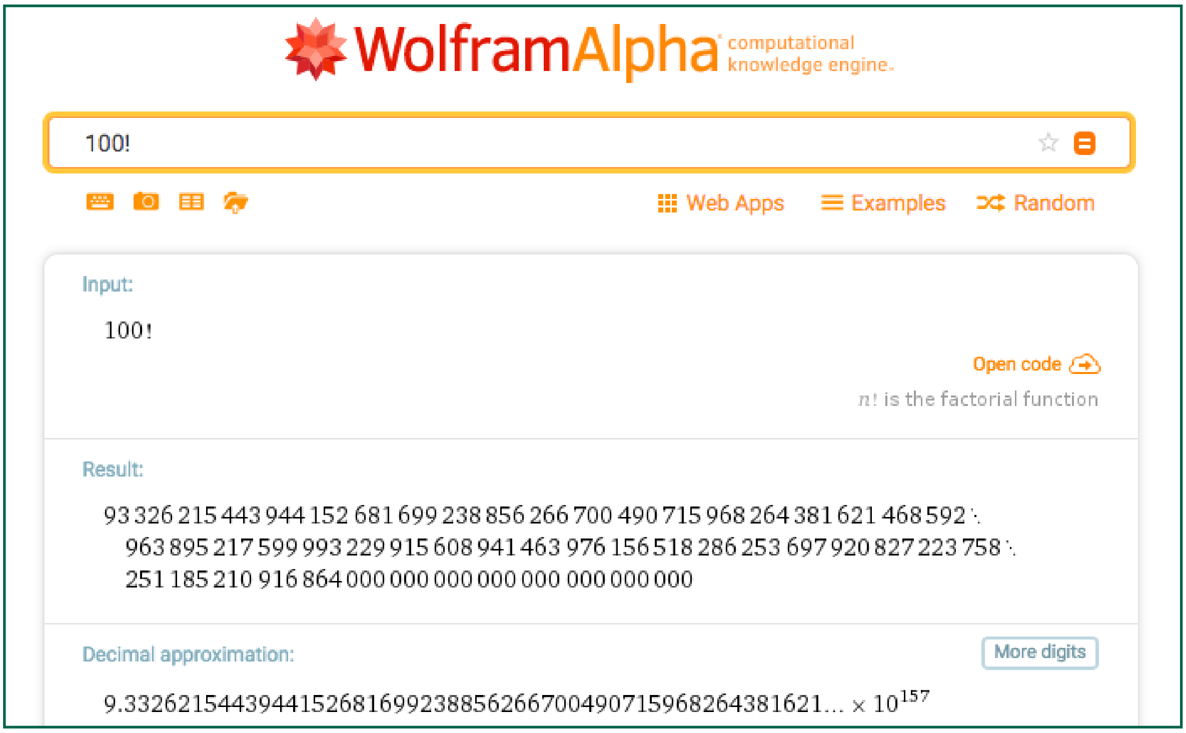
Są trzy najważniejsze zasady zliczania elementów:

- reguła dodawania;
- zasada włączeń i wyłączeń;
- reguła mnożenia.

W podstawie programowej w szkole ponadpodstawowej omawia się z uczniami w szczególności:

- permutacje;
- wariacje;
- kombinacje.

W procesie nauczania rachunku prawdopodobieństwa technologie odgrywają ważną rolę. Najważniejsze ich zastosowanie to wykonywanie obliczeń na dużych liczbach. Obliczenie np. permutacji w zbiorze stuelementowym bez technologii jest praktycznie niemożliwe. A wystarczy użyć Wolfram Alpha i dostajemy rząd wielkości stuelementowej permutacji.



Z jednej strony chcemy, aby uczniowie posługiwali się swobodnie rachunkiem prawdopodobieństwa, a drugiej strony rozwiązywali praktyczne problemy na dużych liczbach.
Poniżej przedstawimy pary zadań, które powinny wystąpić w procesie nauczania matematyki. Dzięki temu będziemy mieli zagwarantowane, że uczniowie posługują się rachunkiem prawdopodobieństwa, a poza tym radzą sobie z rozwiązywaniem praktycznych problemów, **wykorzystując technologie informacyjno-komunikacyjne.**

Przykład 1. Zliczanie

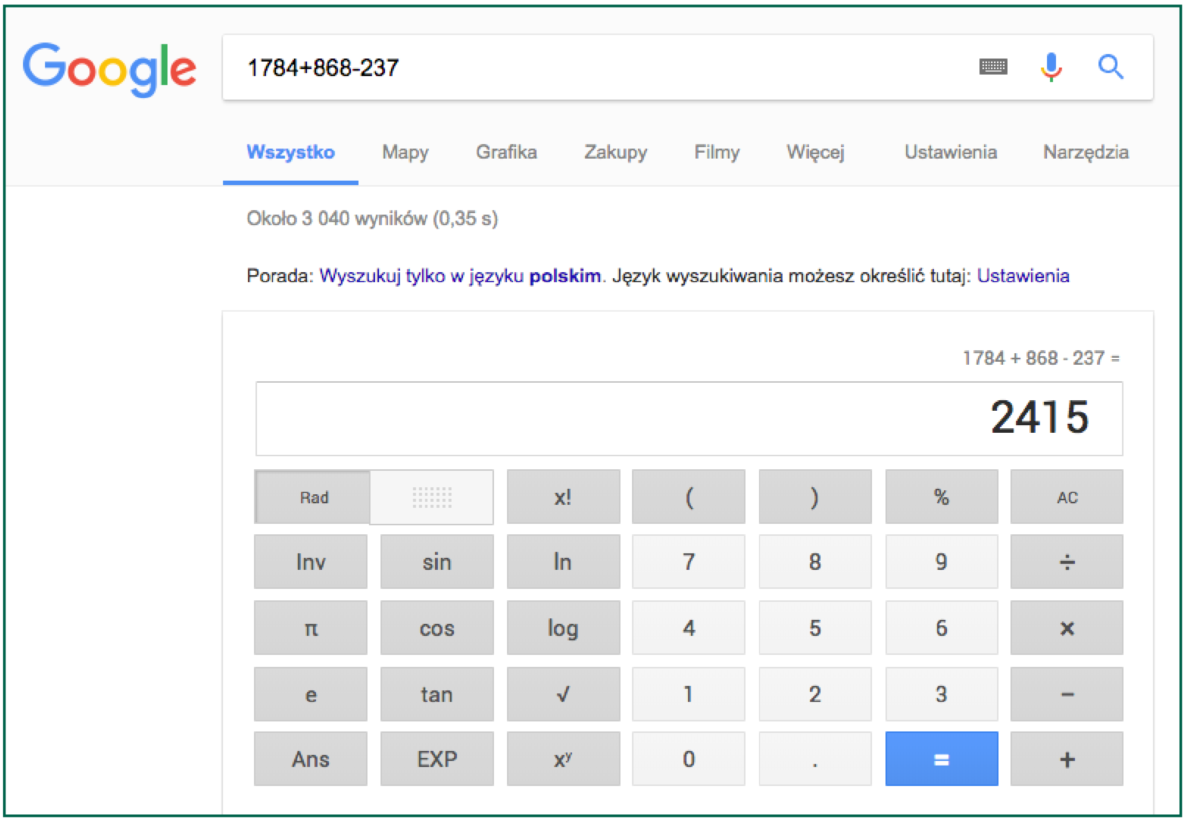
Zadanie 1
W piłkę nożną gra 17 uczniów, w siatkówkę 12 uczniów. W piłkę nożną i siatkówkę gra 10 uczniów. Ilu uczniów jest w tej klasie, jeśli każdy uczeń gra w co najmniej jedną grę?

Rozwiązanie

$PN = 17,\ PS = 12,\ PNiPS = 10,\ Klasa = PN + PS - PNiPS = 19.$

Zadanie 2
W piłkę nożną gra 1784 zawodników, w siatkówkę 868 zawodników. W piłkę nożną i siatkówkę gra 237 zawodników. Ilu jest zawodników, jeśli każdy zawodnik gra w co najmniej jedną grę?

Rozwiązanie
W tym zadaniu możemy użyć wyszukiwarki Google.



W szkole ponadpodstawowej nie wprowadza się wzorów na kombinatorykę. Wymagamy od uczniów wypisania wszystkich elementów. Takie podejście może mocno ograniczyć wykonywanie zadań praktycznych. W tym przypadku warto używać narzędzi technologicznych do obliczeń.

Zadanie 1
Wypisz wszystkie permutacje zbioru $\{a, b, c\}$.

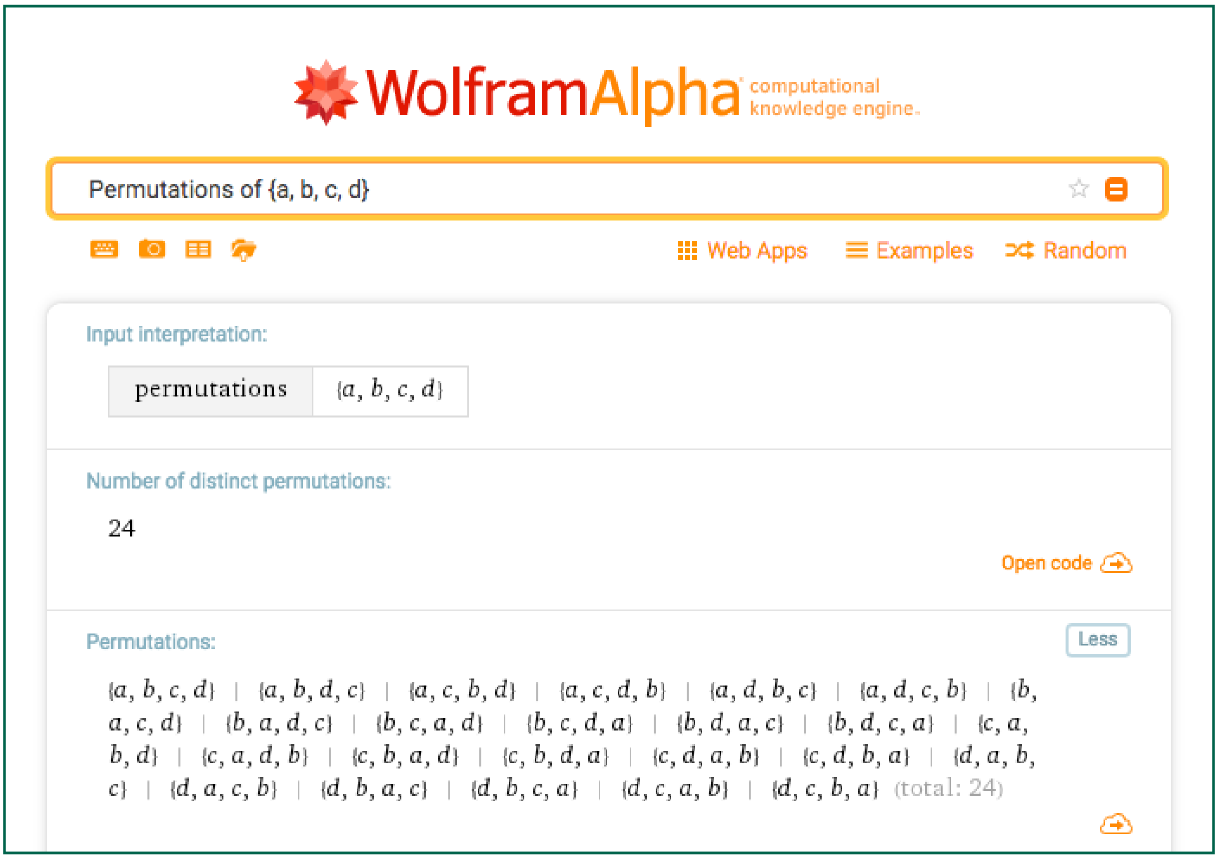
Rozwiązanie

Uczniowie wypisują wszystkie możliwości. Jest ich 6.

Zadanie 2
Wypisz wszystkie permutacje zbioru $\{a, b, c, d\}$.

Rozwiązanie

Możemy wykorzystać technologie. W wyszukiwarce Wolfram Alpha wpisujemy zapytanie: „permutation of $\{a, b, c, d\}$".



Jeśli chcemy otrzymać tylko liczbę permutacji, wpisujemy: „number of permutations of 8 elements”.

Wiadomo, że nie jesteśmy w stanie wypisać wszystkich możliwości. Trzeba to wyraźnie uczniom uświadomić.

Kombinacje

Zadanie 1
Z 4-osobowej grupy wybieramy delegacje dwuosobowe. Ile jest wszystkich możliwych delegacji?

Rozwiązanie

Uczniowie mogą wypisać wszystkie delegacje. Jest ich 6.

Zadanie 2.
Z 25-osobowej klasy wybieramy delegacje trzyosobowe. Ile jest wszystkich możliwych delegacji?

Rozwiązanie

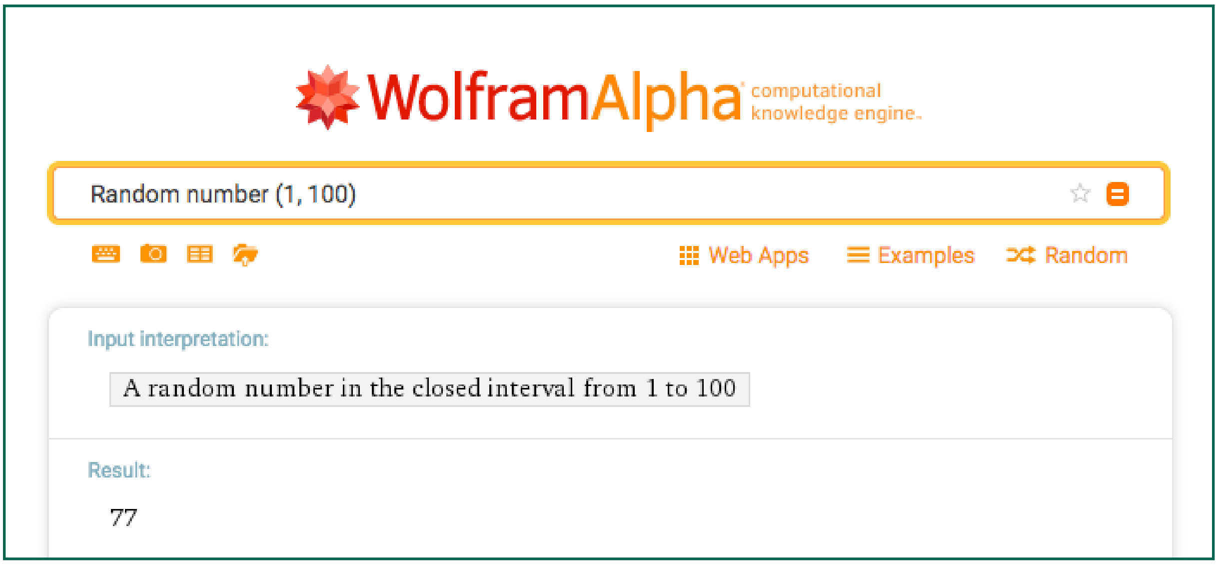
Możemy wykorzystać technologie. W wyszukiwarce Wolfram Alpha wpisujemy zapytanie: „25 choose 3”.

Prawdopodobieństwo

Zanim powstały komputery, tworzono tzw. tablice liczb losowych. Najprostszy sposób tworzenia takich tablic jest następujący: wyciągamy losowo z urny kule ponumerowane od 0 do 9.

Obecnie wykorzystuje się do tego generatory liczb losowych, czyli programy komputerowe generujące losowo liczby.

Wyszukiwarka Wolfram Alpha jest wyposażona w generator liczb losowych. Wpisując komendę „random number (1,100)", dostajemy losowo wybraną liczbę z zakresu od 1 do 100.

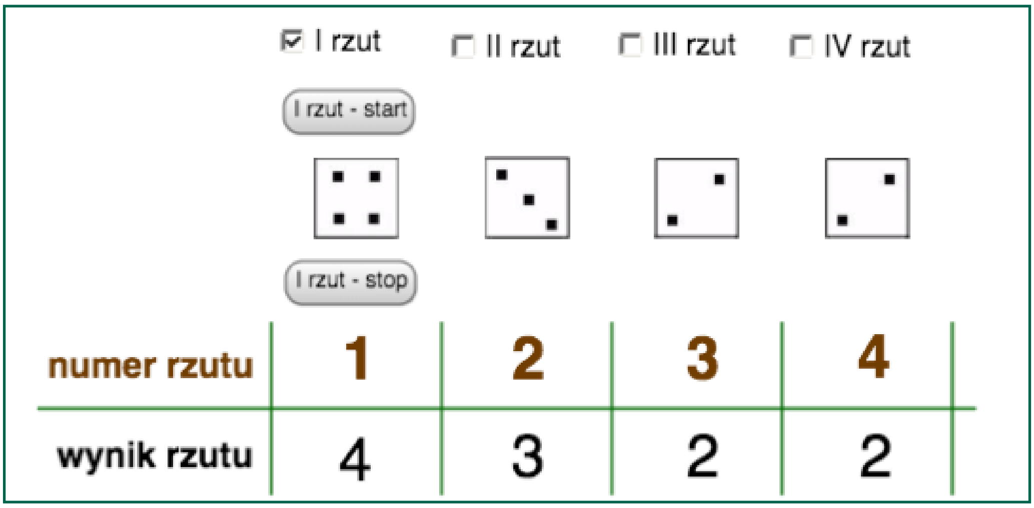


Na stronie [Definicja funkcji. Sposoby przedstawiania funkcji]() w e-podręczniku znajduje się symulator do rzutu kostką.

Ważne jest, aby wprowadzając rachunek prawdopodobieństwa, uczniowie dostrzegli, że technologie wspomagają rozwiązywanie zadań.

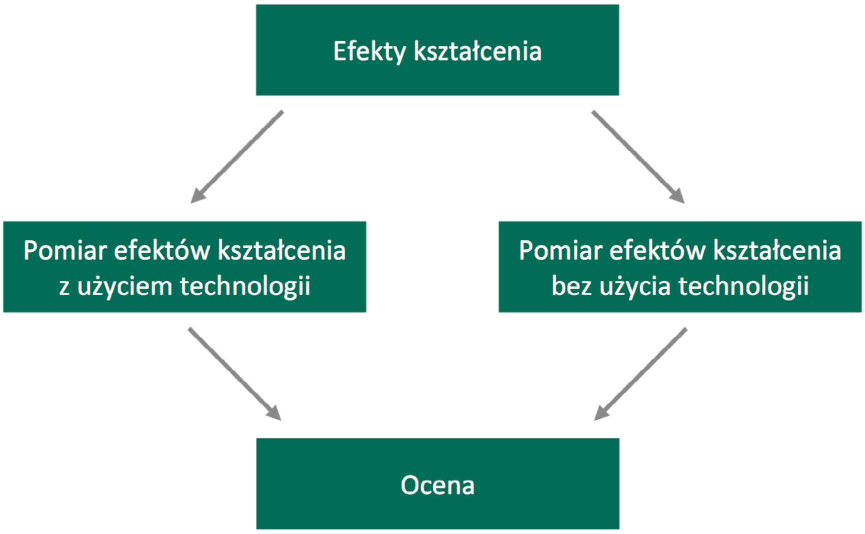
Zadanie 1
Rzucamy co najmniej 100 razy kostką do gry. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania 1?

Zadanie 2
Rzucamy kostką do gry. Możemy wykorzystać symulator.



Ocena efektów kształcenia

Przedstawmy schemat oceny efektów kształcenia z rachunku prawdopodobieństwa.



Przykładowy pomiar z użyciem technologii

Zadanie 1
Z 40-osobowej klasy wybieramy delegacje 5-osobowe. Ile jest wszystkich możliwych delegacji?

Zadanie 2
W urnie znajduje się 1235 kul czerwonych, 234 kule zielone i 345 białych. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej?

Przykładowy pomiar bez użycia technologii

Zadanie 1
Z 5-osobowej klasy wybieramy delegacje 4-osobowe. Ile jest wszystkich możliwych delegacji?

Zadanie 2
W urnie znajduje sie 21 kul czerwonych, 23 zielone i 4 białe. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej?

Bibliografia

Filipiak E., (2011), *Z Wygotskim i Brunerem w tle: Słownik pojęć kluczowych*, Bydgoszcz: Wydawnictwo Uniwersytetu Kazimierza Wielkiego.

Okoń W., (1999), *Wprowadzenie do dydaktyki ogólnej*, Warszawa: PWN.