



# Vademecum Nauczyciela

Wdrażanie podstawy programowej w szkole ponadpodstawowej

## Scenariusze zajęć dla doradców metodycznych

Matematyka



Moduł 1, 2, 3, 4



MINISTERSTWO  
EDUKACJI  
NARODOWEJ

**ORE** OŚRODEK  
ROZWOJU  
EDUKACJI

# MATEMATYKA

## SCENARIUSZ WYKŁADU

### MODUŁ 1

**Autorzy:** dr hab. Maciej Borodzik, dr Michał Krych, Regina Pruszyńska

**Temat:** Nauka dowodzenia

**Czas:** 2 godz. dydaktyczne

#### Cele zajęć:

Uczestnik po zajęciach powinien wykazać się:

#### Znajomością

- założeń podstawy programowej dotyczących zadań na dowodzenie

#### Rozumieniem

- zasad nauczania dowodzenia

#### Umiejętnością

- nauczania dowodzenia w różnych kontekstach
- dobierania zadań stosownych do poziomu uczestników

#### Metody pracy:

- elementy wykładu
- rozwiązywanie przykładowych zadań
- dyskusja nad rozwiązaniami

#### Formy pracy:

- indywidualna
- grupowa

#### Przebieg zajęć:

1. Czynności organizacyjne.
2. Omówienie zapisów podstawy programowej dotyczących dowodzenia. Przedstawienie celów ogólnych i treści nauczania (**slajdy 2, 3**) – 3 min.
3. Omówienie celów nauczania dowodzenia (**slajdy 4, 5, 6**), z podkreśleniem, że w 15. roku życia myślenie abstrakcyjne nie jest jeszcze na tyle ukształtowane, żeby wprowadzać formalny rachunek zdań. Nauczanie logiki opiera się na myśleniu życzeniowym: uczmy logiki, to będziemy myśleć logicznie. Jest to pogląd błędny, a błąd polega na pomyleniu logiki jako nauki prowadzenia rozumowania z logiką szkolną, która *de facto* jest rachunkiem zdań – 7 min.
4. Omówienie problematyki dowodzenia, którego uczymy od początku nauczania matematyki – na przykładzie zadania na poziomie drugiej klasy szkoły podstawowej (**slajd 7**) – 3 min.

5. Zaprezentowanie przez nauczycieli innych „ukrytych” zadań na dowodzenie, realizowanych na wstępnych etapach nauczania. Praca w grupach – 10 min.
6. Przedstawienie przez nauczycieli rozwiązania zadania ze **slajdu 8**, z uwzględnieniem różnych poziomów ścisłości – 5 min.
7. Rozwiązywanie przez zainteresowanych nauczycieli zadania ze **slajdu 9**, również z uwzględnieniem różnych poziomów ścisłości – 2–7 min.
8. Podsumowanie ćwiczeń z punktów 6, 7 i omówienie **slajdu 10**. Zaprezentowanie metody nauczania zapisu dowodu. Przyjmując, że uczeń uczy się zapisywania dowodów na różnych poziomach formalności, należy podkreślić, że konieczne jest udzielenie pomocy uczniowi w przechodzeniu z jednego poziomu do drugiego. Trzeba przypomnieć, że dowód musi być czytelny, poprawny i spójny (bez przeskoków), przy czym przymiotniki te z punktu widzenia formalizmu odnoszą się do wzrastającej trudności – 5 min.
9. Zalecenia do warunków realizacji podstawy programowej matematyki, które przewidują – jako pomoc w nauce dowodzenia – poznanie przez ucznia konkretnych dowodów (**slajd 11**). Należy wyjaśnić, że uczenie dowodzenia służy zorientowaniu się przez ucznia, czego się od niego oczekuje – 3 min.
10. Omówienie przykładowych zadań na dowodzenie. Po rozwiązaniu zadania o podzielności przez 121, umieszczonego na **slajdach 12, 13**, nauczyciele mogą wspólnie zastanowić się nad innymi metodami jego rozwiązania – **slajd 13** pokazuje wariant prostszy. Rozwiązanie z tabelką, jak na **slajdzie 14**, jest za długie dla podzielności przez 121. Można zwrócić uwagę uczestnikom, że przejście do postaci kanonicznej nie jest konieczne na niskim poziomie. Na poziomie dobrej szkoły ponadpodstawowej można powołać się na twierdzenie, że jeśli  $p$  jest liczbą pierwszą, to istnieje takie  $n$ , że  $n^2 + 1$  dzieli się przez  $p$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $p$  przy dzieleniu przez 4 daje resztę 1. Tego twierdzenia uczniowie nie muszą znać – 5–10 min.
11. Zadanie o dodatniości wyrażenia algebraicznego (**slajd 15**). Istnieją co najmniej trzy różne sposoby rozwiązania zadania. Można poprosić nauczycieli o znalezienie sposobu najodpowiedniego dla uczniów – 5–10 min.
12. Zadanie o wielokacie wpisanym (**slajdy 16, 17**). Podanie wskazówek dotyczących dwóch rozwiązań i wspólne zastanawianie się, które z nich jest łatwiejsze dla uczniów oraz czy możliwe będzie rozwiązanie dopiero po udzieleniu wskazówek. Może istnieją inne rozwiązania? – 8–12 min.
13. Zadanie o wysokościach trójkąta (**slajdy 18–21**). Omówienie rozwiązania zadania i rozważanie innych metod rozwiązania albo innych metod stosowania geometrii analitycznej – 6–10 min.
14. W pozostałym czasie – dyskusja.

# MATEMATYKA

## SCENARIUSZ WYKŁADU MODUŁ 2

**Autorzy:** dr hab. Maciej Borodzik, dr Michał Krych, Regina Pruszyńska

**Temat:** Geometria w nowej podstawie programowej

**Czas:** 2 godziny dydaktyczne

### Cele zajęć:

Uczestnik po zajęciach powinien wykazać się:

Znajomością

- zmian w podstawie programowej

Rozumieniem

- sensu zapisu wzorów sinusów i cosinusów w podstawie programowej
- korelacji twierdzenia cosinusów z fizyką

Umiejętnością

- tworzenia prostych zadań geometrycznych
- dobierania zadań stosownie do poziomu uczestników

### Metody pracy:

- elementy wykładu
- tworzenie i przygotowywanie zadań
- dyskusja nad rozwiązaniami

### Formy pracy:

- indywidualna
- grupowa

### Materiały dydaktyczne:

- prezentacja multimedialna
- podstawa programowa matematyki dla szkół ponadpodstawowych

### Przebieg zajęć:

1. Czynności organizacyjne.
2. Omówienie zapisów podstawy programowej matematyki dotyczących nowych elementów podstawy w dziale: planimetria (**slajd 2**) – 3 min.
3. Przypomnienie twierdzenia sinusów (**slajd 3**). Mówimy o dwóch częściach tego twierdzenia,

z których pierwsza podaje równości ilorazów sinusa kąta do długości naprzeciwległego mu boku w trójkącie. Dowód zaprezentowany w pierwszej części **slajdu 5** wynika bezpośrednio ze wzoru na pole trójkąta. Druga część twierdzenia identyfikuje wspomniany iloraz, przyrównując go do połowy odwrotności długości promienia okręgu opisanego na danym trójkącie. Aby zapamiętać, że jest to połowa odwrotności, a nie na przykład podwojona odwrotność, rozpatrujemy szczególny przypadek opisany w drugiej części **slajdu 5**. W trójkącie prostokątnym, przeciwprostokątna jest średnicą okręgu opisanego na tym trójkącie, czyli ma długość równą podwojonej długości promienia. Ta własność przeciwprostokątnej może być interpretowana jako szczególny przypadek twierdzenia sinusów – 5 min.

4. Omówienie twierdzenia sinusów i pokazanie, że ma ono związek z monotonicznością funkcji sinus. Klasyczny dowód twierdzenia nie wymaga funkcji trygonometrycznych (**slajd 6**) – 3 min.
5. Zaprezentowanie przykładowego zadania zamkniętego (**slajd 7**). Można poprosić nauczycieli o wymyślenie podobnych zadań testowych – 2 min; jeśli nauczyciele zechcą zaproponować zadania, czas można przedłużyć do 7 min.
6. Przypomnienie treści twierdzenia cosinusów (**slajd 8**) – 2 min.
7. **Slajd 8** przedstawia pierwszy aspekt twierdzenia cosinusów: twierdzenie wyznacza kąt pomiędzy dwoma bokami, jeśli znane są długości trzech boków. W tym sensie twierdzenie cosinusów jest uogólnieniem twierdzenia Pitagorasa. Ten aspekt twierdzenia cosinusów daje ponadto możliwość rozróżniania trójkątów ostrokątnych, prostokątnych i rozwartokątnych (**slajd 9**) – 5 min.
8. **Slajd 10** dotyczy drugiego aspektu twierdzenia cosinusów. Przy ustalonych długościach dwóch boków długość trzeciego boku jest zależna od kąta między dwoma bokami: im ten kąt jest większy, tym dłuższy jest trzeci odcinek. Twierdzenie cosinusów ukazuje tę zależność w sposób ścisły – 4 min.
9. **Slajd 11** prezentuje, jak z twierdzenia cosinusów (i wzoru na cosinus kąta podwojonego) wyprowadzić twierdzenie sinusów. Należy zapytać nauczycieli, czy mogą zaproponować inne sposoby wyprowadzenia twierdzenia sinusów. Jeśli nauczyciele są zainteresowani, można pokazać wyprowadzenie twierdzenia cosinusów (nieumieszczone na slajdzie) – 4 min.
10. Prezentowanie kolejnych zadań zamkniętych (**slajd 12**). Można poprosić nauczycieli o przygotowanie zadań podobnych – 2–7 min.
11. Rozwiązywanie trójkątów, dające możliwość układania prostych zadań otwartych (**slajd 13**). Możemy odłożyć to zadanie lub omówić je z nauczycielami i wspólnie rozwiązać albo poprosić nauczycieli o przygotowanie innych zadań – 4 min.
12. Zaprezentowanie trudniejszego wariantu powyższego zadania, prowadzącego do trzeciego, bardziej złożonego aspektu twierdzenia cosinusów: jeśli znamy długości dwóch boków i miarę kąta w trójkącie, który nie znajduje się pomiędzy tymi bokami, to twierdzenie cosinusów daje równanie kwadratowe na długość trzeciego boku. Zgodnie z twierdzeniem **slajd 14** pokazuje zadanie mające dwie odpowiedzi. Warto zwrócić uwagę, że nie ma cechy przystawiania KBB (jest

tylko BKB) właśnie dlatego, że są dwie odpowiedzi. Można je zresztą przedstawić graficznie – 5 – 8 min.

13. Ostatnia część prezentacji ukazuje związki twierdzenia cosinusów z fizyką. Pokazujemy, że wzór cosinusów można stosować również w geometrii analitycznej. Ten aspekt twierdzenia łączy się z obliczeniami typu: praca wykonana przez siłę, która nie jest równoległa do przesunięcia. Jeśli nawet dany materiał wychodzi poza podstawę programową matematyki, nie znaczy to, że omawianie go nie ma sensu (**slajdy 15, 16**) – 10 min.

14. W pozostałym czasie – dyskusja.

# MATEMATYKA

## SCENARIUSZ WYKŁADU

### MODUŁ 3

**Autorzy:** dr hab. Maciej Borodzik, dr Michał Krych, Regina Pruszyńska

**Temat:** Rachunek prawdopodobieństwa w „nowej” podstawie programowej

**Czas:** 2 godz. dydaktyczne

**Cele zajęć:**

Uczestnik po zajęciach powinien wykazać się:

Znajomością

- założeń podstawy programowej, dotyczących rachunku prawdopodobieństwa

Rozumieniem

- klasycznego modelu prawdopodobieństwa
- prawdopodobieństwa warunkowego
- schematu Bernoulliego

Umiejętnością

- rozwiązywania zadań z rachunku prawdopodobieństwa w zakresie obejmującym „nową” podstawę programową

**Metody pracy:**

- elementy wykładu
- rozwiązywanie przykładowych zadań
- dyskusja nad rozwiązaniami

**Formy pracy:**

- indywidualna
- grupowa

**Materiały dydaktyczne:**

- prezentacja multimedialna
- podstawa programowa matematyki

**Przebieg zajęć:**

1. Czynności organizacyjne.
2. Przypomnienie sformułowań podstawy programowej matematyki w zakresie rachunku prawdopodobieństwa. Należy wyjaśnić, które punkty zostały dodane (**slajdy 1, 2**) – 3 min.
3. Należy wyjaśnić punkt XII.5 podstawy programowej w zakresie podstawowym, dotyczący obliczania wartości oczekiwanej w prostych grach losowych. Przykładowe zadania zawierają **slajdy 3 i 4** – 5 min.
4. Omówienie klasycznego modelu prawdopodobieństwa i przedstawienie zadania o grze w szachy (**slajd 5**). Po krótkiej przerwie na zastanowienie się – zaprezentowanie jednego bądź dwóch rozwiązań zadania (**slajdy 6, 7**) – 5–8 min.
5. Podanie zadania o ustawianiu cyfr (**slajd 8**), z propozycją przygotowania przez nauczycieli rozwiązań dla ucznia zdolnego i przeciętnego. Należy zaznaczyć, że zadanie to jest odpowiednie dla zakresu rozszerzonego (ze względu na posługiwanie się wzorem na liczbę permutacji). Po kilkuminutowej pracy w grupach – dyskusja nad propozycjami nauczycieli – 15–20 min.
6. Omówienie prawdopodobieństwa warunkowego. Zaprezentowanie przykładu o dzieciach (**slajd 9**) i omówienie jego rozwiązania (**slajd 10**). Należy zadać nauczycielom pytanie, co się dzieje w przypadku, gdy chłopcem jest starsze dziecko, i poczekać na poprawną odpowiedź (**slajd 11**). Warto podkreślić, że zadania o dzieciach pokazują trudność rachunku prawdopodobieństwa – 7 min.
7. Przekazanie nauczycielom do samodzielnego bądź grupowego rozwiązania zadania o paradoksie „idź na całość” (**slajd 12**). Omówienie rozwiązania i dyskusja – 15 min.
8. Przypomnienie schematu Bernoulliego (**slajd 13**) – 3 min.
9. Wspólne rozwiązywanie pierwszego zadania o schemacie Bernoulliego – o rzutach kostką (**slajdy 14 i 15**) – 5 min.
10. Podanie nauczycielom zadania o 6 rzutach monetą (**slajd 16**). Omawianie różnych rozwiązań – 10 min.
11. Rozwiązywanie przez nauczycieli zadania o 20 i 21 rzutach monetą (**slajd 17**) – 15 min.
12. W pozostałym czasie – dyskusja.

# MATEMATYKA

## SCENARIUSZ WYKŁADU

### MODUŁ 4

**Autorzy:** dr hab. Maciej Borodzik, dr Michał Krych, Regina Pruszyńska

**Temat:** Rachunek różniczkowy w „nowej” podstawie programowej

**Czas:** 2 godz. dydaktyczne

**Cele zajęć:**

Uczestnik po zajęciach powinien wykazać się:

Znajomością

- założeń podstawy programowej dotyczących rachunku różniczkowego

Rozumieniem

- twierdzenia o monotoniczności
- metod szukania wartości największej i najmniejszej funkcji

Umiejętnością

- znajdowania wartości największej i najmniejszej funkcji oraz zastosowania tej umiejętności do zadań z treścią

**Metody pracy:**

- elementy wykładu
- rozwiązywanie przykładowych zadań
- dyskusja nad rozwiązaniami

**Formy pracy:**

- indywidualna
- grupowa

**Materiały dydaktyczne:**

- prezentacja multimedialna
- podstawa programowa matematyki

**Przebieg zajęć:**

1. Czynności organizacyjne.
2. Przypomnienie sformułowań podstawy programowej matematyki w zakresie rachunku różniczkowego. Należy powiedzieć, które punkty zostały dodane (**slajd 2**) oraz wyjaśnić warunki ich realizacji (**slajd 3**) – 5 min.
3. Omówienie twierdzenia o monotoniczności funkcji. Zgodnie z zapisami podstawy programowej jest to jedno z ważniejszych narzędzi do znajdowania wartości największej i najmniejszej funkcji (**slajdy 4, 5**) – 5 min. Warto podkreślić, że powszechnie stosowane metody, takie jak policzenie pochodnej i przyrównanie do zera nie zawsze dają dobre rezultaty, a wprowadzają sporo zamieszania.
4. Przedyskutowanie przykładu funkcji  $f(x) = x^3 - 3x$  (**slajdy 6, 7**) i omówienie typowych błędów popełnianych przez uczniów przy wykonywaniu tego przykładu (**slajd 8**) – 10 min.
5. Omówienie zadania o obracaniu trójkąta prostokątnego wokół przeciwprostokątnej. Jest to bardzo pouczające zadanie, w którym znalezienie dziedziny określoności funkcji zajmuje sporo czasu. Przykład ten należy rozwiązywać powoli, kluczowy jest ostatni krok, warto więc, aby nauczyciele dokładnie przeanalizowali to zagadnienie – 15 min.
6. Podanie nauczycielom kolejnych trzech zadań (**slajdy 16, 17, 18**) do samodzielnej albo grupowej pracy. Każde zadanie należy omówić i przedyskutować. Przeznacza się około 15 minut na zadanie, co stanowi czas łączny – 45 min. W zależności od grupy zadania można podawać po kolei, albo wszystkie na raz, jednak pierwszy sposób wydaje się lepszy.
7. W pozostałym czasie – dyskusja.

[vademecum.ore.edu.pl](http://vademecum.ore.edu.pl)