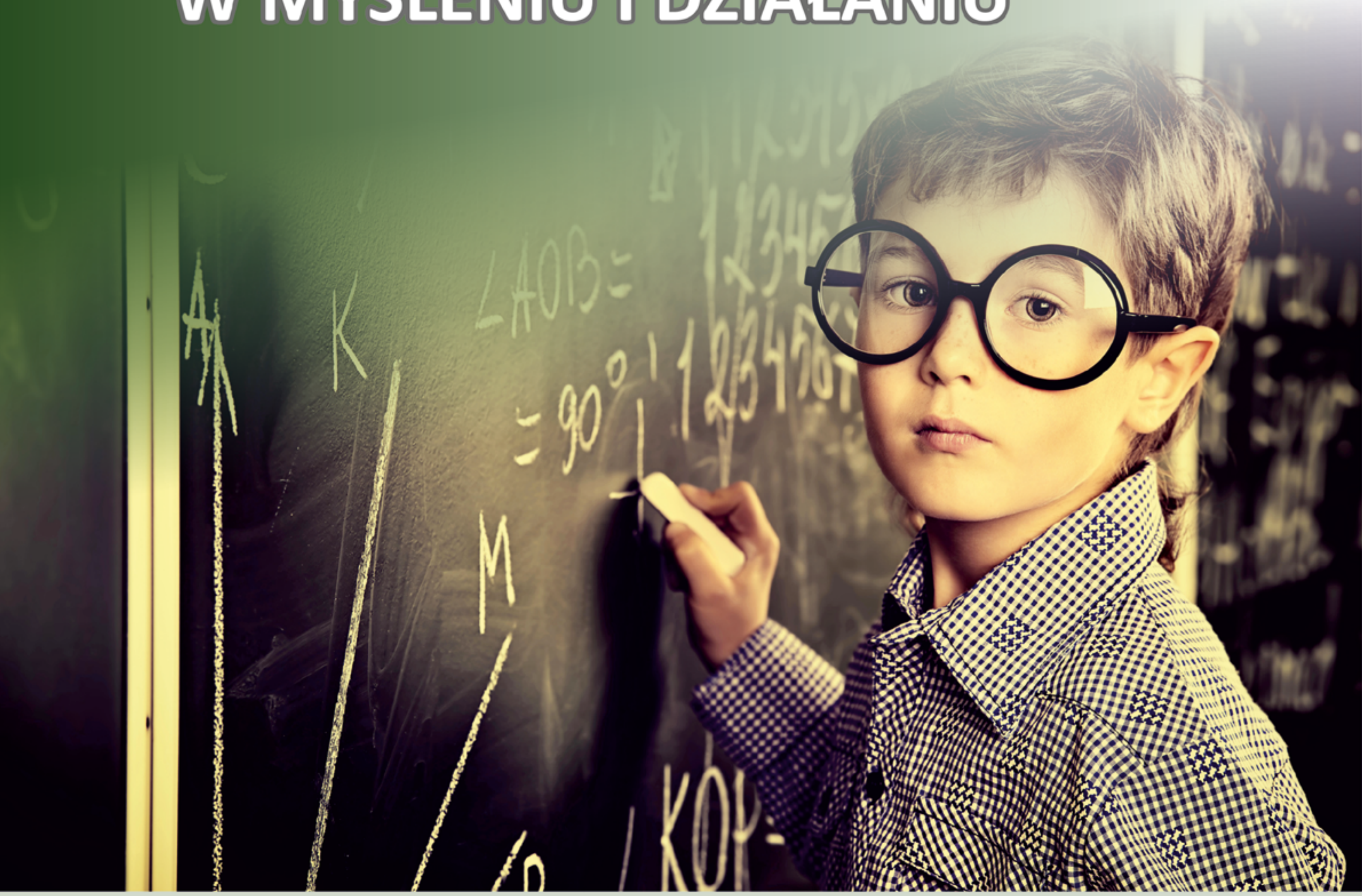
Grażyna Śleszyńska

ROZWIJANIE SAMODZIELNOŚCI ORAZ KREATYWNOŚCI W MYŚLENIU I DZIAŁANIU



Jak uczyć (się) matematyki, by rozwijać ciekawość poznawczą

Ośrodek Rozwoju Edukacji

Grażyna Śleszyńska

ROZWIJANIE SAMODZIELNOŚCI ORAZ KREATYWNOŚCI W MYŚLENIU I DZIAŁANIU

Jak uczyć (się) matematyki, by rozwijać ciekawość poznawczą

Ośrodek Rozwoju Edukacji
Warszawa 2025

Konsultacja merytoryczna
Agnieszka Jaworska
Wydział Kształcenia Ogólnego i Kompetencji Cyfrowych

Redakcja i korekta
Karolina Strugińska

Projekt okładki, layout,
redakcja techniczna i skład
Barbara Jechalska

Fotografie wykorzystane w publikacji:
© prometeus/Photogenica; © stuartmiles/Photogenica; Pixabay.com

ISBN 978-83-67366-72-4

Ośrodek Rozwoju Edukacji
Aleje Ujazdowskie 28
00-478 Warszawa
www.ore.edu.pl

Spis treści

1. Kompetencje kluczowe XXI wieku – 4K

Świat się zmienia – uczeń się zmienia. Definicje, aksjomaty i twierdzenia matematyczne są niezmienne, ale nauczanie matematyki musi podążać za zmianami realiów codziennego życia i potrzebami współczesnych uczniów. W szkole XXI wieku na lekcjach matematyki nie wystarczy nauczanie algorytmów i sprawdzanie stopnia ich opanowania. Należy wyposażać ucznia w umiejętność samodzielnego przeprowadzania rozumowania oraz odkrywania nowych własności i praw matematycznych. Poszukiwanie podczas współpracy w zespole pomysłów na rozwiązanie problemów analizowanych na zajęciach pozwala uczniom lepiej zrozumieć i zapamiętać trudne matematyczne treści.

Współczesny nauczyciel musi mieć świadomość, że przygotowuje swojego ucznia do życia w świecie wymagającym:

- krytycznego myślenia,
- kreatywności,
- umiejętności komunikacyjnych,
- kooperacji,

czyli posiadania kluczowych kompetencji XXI wieku (określanych mianem „**4K**").

Krytyczne myślenie to połączenie myślenia indukcyjnego („od szczegółu do ogółu"), pozwalającego ze szczegółowych obserwacji wyciągnąć ogólny wniosek (**obserwacja > wzór > hipoteza wstępna > teoria**), z myśleniem dedukcyjnym („od ogółu do konkretu"), dzięki któremu z ogólnej przesłanki jest wyciągany konkretny wniosek (**teoria > hipoteza > obserwacja > potwierdzenie**)[1]. Ważne, aby podczas lekcji matematyki nauczyciel proponował i organizował działania uczniów, stosując obie te metody.

Kreatywność to „ocena informacji i argumentów w celu formułowania racjonalnych wniosków i znajdowania nowatorskich rozwiązań"[2]. Uczeń kreatywny potrafi spojrzeć na problem w sposób nowatorski. Korzystając z dostępnego rozwiązania, może przekształcić je np. w bardziej dla siebie zrozumiałe, często atrakcyjniejsze, albo opracować zupełnie nowe. Rozwijanie kreatywności na zajęciach matematyki polega na organizowaniu sytuacji dydaktycznych, w których zadaniem uczniów jest krytyczna ocena gotowych rozwiązań proponowanych

[1] Polecam artykuł: Winiarek M., (2020), *Różnica między rozumowaniem indukcyjnym a dedukcyjnym*, https://mysleniekrytyczne.edu.pl/roznica-miedzy-rozumowaniem-indukcyjnym-a-dedukcyjnym/ [dostęp: 17.03.2025].

[2] Sala A., Punie Y., Garkov V., Cabrera M., (2020), *LifeComp – The European framework for personal, social and learning to learn key competence*, Bruksela: European Commission: Joint Research Centre, https://op.europa.eu/en/publication-detail/-/publication/7d9c9dcd-bf31-11ea-901b-01aa75ed71a1/language-en [dostęp: 17.03.2025].

w podręcznikach czy zbiorach zadań – w kontekście dostosowywania tych propozycji do swoich potrzeb, a także proponowanie nowych, często nieoczekiwanych, sposobów rozwiązywania zadań.

Kompetencje komunikacyjne to **umiejętność mówienia** – czyli przekazywania informacji z użyciem języka zrozumiałego dla odbiorcy, a także **umiejętność aktywnego słuchania** – czyli odbierania i rozumienia przekazywanych informacji. Zadaniem nauczyciela matematyki jest generowanie sytuacji, w których uczeń ma okazję mówić, posługując się językiem matematyki, a także wysyłać komunikaty świadczące o tym, że rozumie informacje sformułowane w tym języku.

Kooperacja na zajęciach matematycznych to **współpraca i zaplanowane działanie** kilkorga uczniów w celu osiągnięcia wspólnego celu – wielostronna wymiana zasobów, dzielenie się umiejętnościami i wiedzą, aby stworzyć coś nowego, znaleźć efektywne rozwiązanie problemu. Najlepszą metodą rozwijania tej kompetencji na lekcjach matematyki jest organizowanie pracy w grupach, umożliwianie uczniom uczenia się od siebie nawzajem i wdrażanie nauczania projektowego.

2. Role i zadania współczesnego nauczyciela

Rola i zadania nauczyciela w XXI wieku podlegają naturalnej ewolucji. Tradycyjny model edukacji znany z przeszłości nie ma już zastosowania we współczesnej szkole. Współczesny nauczyciel nie może być jedynie dostarczycielem wiedzy, musi podążać za potrzebami uczniów z pokolenia Alfa (jeszcze przez krótki czas także za tymi z pokolenia Z, ale już wkrótce również za należącymi do pokolenia Beta). Wiąże się z tym wiele nowych ról – inspiratora, tutora, mentora…

Aby skutecznie komunikować się ze współczesnymi uczniami, nauczyciel musi wykorzystywać bliskie im nowoczesne zasoby i media, podpowiadając jednocześnie, w jaki sposób współczesna technologia może pomagać w rozwiązywaniu problemów matematycznych. Ważne, aby słuchał opinii swoich uczniów i próbował zrozumieć ich perspektywę, był otwarty na zmiany i podążał za innowacjami.

Nauczyciel XXI w., porzucając stanowisko eksperta, wchodzi w role:

- **obserwatora i inspiratora** – który organizuje samodzielną pracę uczniów ukierunkowaną na odkrywanie praw, właściwości, sposobów rozwiązań, towarzysząc im w tym procesie;
- **słuchacza i uczestnika procesu dydaktycznego** – który reaguje na potrzeby uczniów, udziela wsparcia, zadaje pytania pobudzające do twórczego myślenia;
- **tutora lub przewodnika** – który wskazuje kierunek rozwoju, zachęca do kształcenia umiejętności samodzielnego myślenia i tworzenia, podkreśla wagę krytycznego nastawienia, twórczego analizowania, logicznej argumentacji i refleksji nad uzyskanym rozwiązaniem;
- **mentora i doradcy** – który udziela rad, wskazówek i informacji jako osoba posiadająca wiedzę, umiejętności i doświadczenie.

W ramach podsumowania przytoczę krótki fragment artykułu dr Michała Szurka[3] *Jak uczyłem pół wieku temu, ćwierć wieku temu i jak uczę teraz:*

> *Byliśmy kiedyś przewodnikami naszych uczniów po dobrze znanym nam obszarze. Pokazywaliśmy im góry, jeziora, lasy, uczyliśmy, gdzie są trudności, pułapki i niebezpieczeństwa. Mieliśmy to już*

[3] Polecam całość tej publikacji: Szurek M., (2023), *Jak uczyłem pół wieku temu, ćwierć wieku temu i jak uczę teraz*, [w:] Kąkol H. i in. (red.), *Współczesne problemy nauczania matematyki. Prace monograficzne z dydaktyki matematyki*, Poznań: Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza, t. 9., s. 30.

„przećwiczone". Teraz mamy ich doprowadzić do celu, którego nie znamy ani my, ani oni, ani w ogóle nikt. Mało tego, teren jest zamglony, a my jesteśmy w nim po raz pierwszy. Często jeszcze znajdujemy na drodze kłody pozostawione chyba celowo, żeby było trudniej. I nauczyciele to robią! Czy ktoś teraz wątpi, że to właśnie nauczyciele dają największy wkład w rozwój społeczeństw? Jak uczyć w XXI wieku? Oczywiście inaczej. Ale jak? Jak już wspomniałem, komu wydaje się, że wie, ten ma rację! To znaczy wydaje mu się! Mamy smartfony, laptopy, tablety i setki aplikacji. Jak znaleźć równowagę? Nie może być tak, jak za króla Ćwieczka, ale na pewno musimy umieć wykopać dołek zwykłą łopatą – nawet jeżeli są koparki. Zmieniła się rola szkoły i nauczyciela. Gdy karierę pedagogiczną zaczynał mój ojciec, w wiejskiej szkole na Podlasiu, blisko sto lat temu, szkoła była głównym ośrodkiem kultury w promieniu wielu kilometrów, a rolą nauczyciela było przekazywanie wiedzy. Zbyteczne będzie wspominać, jak to się zmieniło. Moja córka (nauczycielka szkoły podstawowej) ma torbę na zakupy z napisem – „Nauczyciel – osoba, która pomaga rozwinąć skrzydła". I to mi się najbardziej podoba. Pomaga. Tylko tyle i aż tyle.

3. Lekcja dobrze zaplanowana – cele, kryteria wymagań, pytanie problemowe

Planowanie to proces ustalania celu i wskazywania działań koniecznych do wykonania, aby go osiągnąć. Prawidłowo wyznaczony cel (realny, zrozumiały, określony czasowo) umożliwia realizację naszych planów. Wdrażanie uczniów do podążania za zaplanowanymi celami lekcji daje szansę na odpowiednią organizację ich pracy i świadome uczestniczenie w uczeniu się.

Przygotowując się do lekcji, nauczyciel określa jej **cel ogólny** i **cele szczegółowe (operacyjne)**.

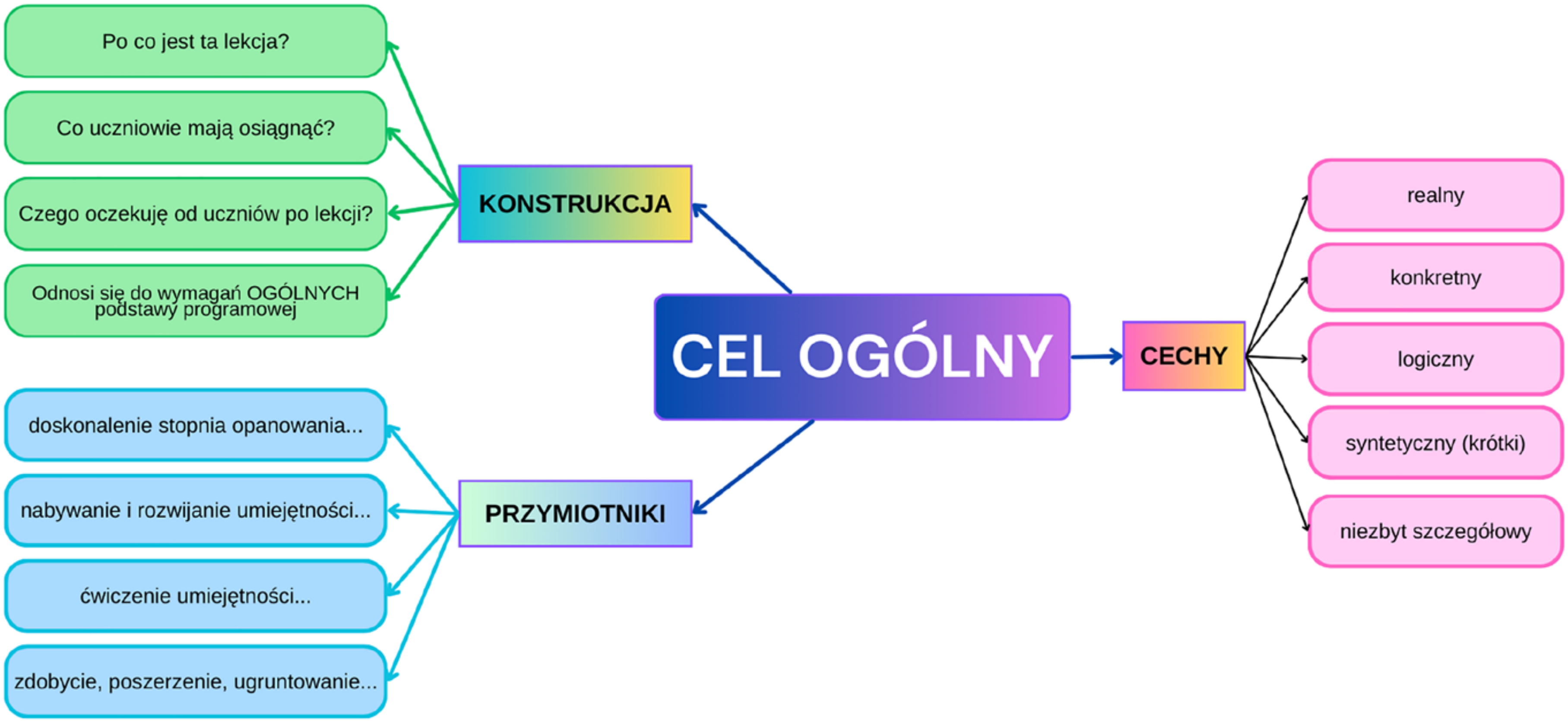
Cel ogólny powinien opisywać założony, szeroko rozumiany, efekt lekcji, np.:

- zdobycie (poszerzenie, ugruntowanie) nowej wiedzy o…;
- nabywanie i rozwijanie umiejętności takich jak… ;
- ćwiczenie umiejętności… i doskonalenie stopnia ich opanowania.

Opracowując ten cel, warto posiłkować się *Wymaganiami ogólnymi* zapisanymi w podstawie programowej, aby wykazać, że nauczyciel rozumie konieczność ich realizacji na lekcjach matematyki.

Inną rolę pełnią cele, z którymi nauczyciel zapoznaje uczniów na początku lekcji – **cele szczegółowe**. Powinny zostać zapisane w formie operacyjnej (z użyciem czasowników sugerujących konkretne czynności i umiejętności), w języku zrozumiałym dla ucznia. Warto przełożyć je na jeszcze bardziej szczegółowe **kryteria wymagań**, które po zakończonej lekcji wskażą uczniowi (i nauczycielowi), na jakim poziomie zostały zrealizowane zakładane cele i nad czym jeszcze należy popracować.

Rys. 1. Mapa myśli: skuteczne opracowywanie celów ogólnych lekcji



Źródło: opracowanie własne

Rys. 2. Mapa myśli: skuteczne opracowywanie celów szczegółowych (operacyjnych) lekcji

Źródło: opracowanie własne

Nie zawsze docenianym przez nauczycieli elementem lekcji, który ma szansę zaciekawić uczniów i spowodować ich aktywne uczestnictwo w odkrywaniu nowej wiedzy, jest **pytanie problemowe**. Pytanie „na start" ma za zadanie motywować do pracy i inspirować do poszukiwania na nie odpowiedzi, która pomaga uczniowi określić: Po co się tego uczę? Czy to mi się kiedyś przyda?

Można rozpocząć zajęcia, pytając: „Czy przysłowie <Potrzeba matką wynalazków> można odnieść do odkrycia twierdzenia Pitagorasa?". Na ile takie pytanie zainspiruje uczniów? Zapewne postarają się znaleźć na nie odpowiedź podczas lekcji. Może zastanowią się nad nim także w domu. A może zaczną ze sobą (albo z dorosłymi) na ten temat dyskutować? Jedno jest pewne – będą pamiętać o twierdzeniu Pitagorasa, o jego założeniu i tezie.

4. Jak rozwijać ciekawość poznawczą uczniów?

Nauczyciele poszukują metod nauczania matematyki, które rozbudzą ciekawość poznawczą uczniów, rozwiną ich samodzielność oraz kreatywność w myśleniu i działaniu. Na te wszystkie potrzeby odpowiada nauczanie przekazujące uczniom odpowiedzialność za zdobycie nowej wiedzy.

Warto wskazać wartościowe sposoby organizowania pracy, które sprawią, że uczeń, z dyskretnym wsparciem nauczyciela, będzie stawał się „odkrywcą swojej matematyki". Do metod tych należą:

1) metoda czynnościowa;
2) praca z Mapami Rozwiązywania Problemów (ang. *Problem Solving Map*);
3) uczenie się we współpracy metodą JIGSAW;
4) nauczanie-uczenie się zgodne z cyklem Kolba.

4.1. Od biernych słuchaczy do odkrywców – metoda czynnościowa w nauczaniu matematyki

Autorką koncepcji czynnościowego nauczania matematyki jest prof. Anna Zofia Krygowska. W *Zarysie dydaktyki matematyki*, wydanym w 1977 r., prof. Krygowska zauważyła, że „nauczanie matematyki to — ze strony nauczyciela — organizowanie aktywnego i świadomego procesu uczenia się matematyki przez ucznia, kierowanie jego prawidłowym przebiegiem i kontrolowanie jego wyników"[4]. Słowa te nie straciły wartości, są cenną wskazówką dla współczesnych nauczycieli. Uczeń XXI wieku nie potrafi siedzieć cichutko w ławce, słuchać nauczyciela, skrupulatnie notować i uczyć się matematyki „na pamięć". Zadaje wciąż pytania: Dlaczego tak? Po co się tego uczę? Czy to mi się kiedyś przyda?

Lekcje, podczas których uczeń pod kierunkiem nauczyciela, wykonując małe kroki, bada, obserwuje i odkrywa „swoją matematykę", to jakby odwrócenie całego procesu tradycyjnego nauczania-uczenia się. Nauczanie czynnościowe jest metodą pracy ukierunkowaną przede wszystkim na wykorzystywanie wrodzonej ciekawości i aktywności poznawczej uczniów,

[4] Zob. Krygowska A.Z., (1997), *Zarys dydaktyki matematyki*, cz. 1., Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne; Żeromska A.K., (2020), *Nie zmiękczajcie matematyki. O wybranych tezach naukowych Zofii Anny Krygowskiej*, Zachodniopomorski Dwumiesięcznik Oświatowy, „Refleksje", nr 2, 2020: https://refleksje.zcdn.edu.pl/wp-content/uploads/2020/03/REFLEKSJE-2-2020.pdf [dostęp: 14.04.2025].

którzy dzięki temu mają okazję samodzielnego odkrywania prawideł tej, niekiedy bardzo trudnej, dziedziny wiedzy. Wykorzystując tę metodę, najpierw należy zorganizować aktywność uczniów (w której tle jest zawarta poznawana matematyczna wiedza) z zastosowaniem naturalnych materiałów, modeli: praktyczne działania pozwalają oswajać i powoli odkrywać nowe pojęcia, własności, obiekty. Kolejne kroki prowadzą ucznia poprzez obserwacje i własne spostrzeżenia do uogólnień, aż wreszcie tworzy on formalne opisy i abstrakcyjne definicje – formułując je świadomie, na podstawie odkrytych samodzielnie zasad.

Etapy pracy nauczyciela w nauczaniu czynnościowym:
1. **Analiza teoretyczna czynności istotnych dla nowego pojęcia** – należy dokładnie przemyśleć istotę pojęcia i określić, jaki ciąg czynności i w jakiej kolejności trzeba przeprowadzić, aby je skonstruować.
2. **Ogólny plan kształtowania nowego pojęcia** – aby pojęcie zostało prawidłowo i w pełni przyswojone przez ucznia, należy uwzględnić przechodzenie przez kolejne etapy: od operacji konkretnych przez wyobrażeniowe do operacji abstrakcyjnych; w każdym stadium procesowi nauczania powinny odpowiadać innego rodzaju ćwiczenia.
3. **Dobór zadań** – w zależności od poziomu nauczania należy dobrać konkretne zadania, prowadzące do wykonania przez ucznia pożądanych czynności.

Poziomy czynności uczniów w nauczaniu czynnościowym:
1. **Czynności konkretne** – wykonywane manualnie ćwiczenia zbliżające uczniów do odkrywanego pojęcia; uczniowie pracują z realnymi przedmiotami, np. zginają kartkę, operują modelami brył itp.:
   - ćwiczenia wprost;
   - ćwiczenia odwrotne do poprzednich;
   - ćwiczenia tej samej czynności myślowej na różnych materiałach, w różnych położeniach, z zastosowaniem różnych zmiennych, w różnych sytuacjach;
   - ćwiczenia wymuszające odmienne ciągi czynności o tym samym rezultacie, zróżnicowane sposoby rozwiązania, wybór najbardziej ekonomicznej drogi.
2. **Czynności wyobrażeniowe** – zmierzające do ukształtowania w umysłach uczniów poznawanego pojęcia; uczniowie wykonują rysunki, zapisują symbole będące wyobrażeniami odkrywanego pojęcia:
   - ćwiczenia w słownym opisie czynności, konstruowanie planów postępowania opisujących wykonanie czynności;
   - ćwiczenia w różnych formach – przedstawianie, rysowanie, ilustrowanie lub opis tego samego pojęcia.
3. **Czynności abstrakcyjne** – zmierzające do ukształtowania symbolicznej reprezentacji analizowanego pojęcia; uczniowie prowadzą rozważania wyłącznie teoretyczne, wykonują obliczenia, wyciągają wnioski, określają własności:
   - ćwiczenia prowokujące konflikt myślowy, kontrprzykłady, skrajne przypadki, zadania z błędami uwypuklające istotne warunki definicji i założenia twierdzeń;
   - ćwiczenia w zastosowaniu ukształtowanego pojęcia podczas rozwiązywania różnych zadań.

Przykład wykorzystania czynnościowej metody nauczania podczas wprowadzania pojęcia *symetralnej odcinka*

Problem: Należy posadzić 10 tulipanów na grządce tak, żeby każdy z nich rósł w tej samej odległości od każdej z dwóch róż znajdujących się już na tej grządce.

Czynności konkretne:

- w sytuacji wykonywania zadania w terenie (co jest wskazane) – przygotowanie sznurków różnej długości i grubego patyka do zrobienia w ziemi dołków na cebulki tulipanów;
- w przypadku wykonywania zadania w sali – wykorzystanie zginanych kartek albo tekturki, sznurka i pinezki;
- obserwacje, dyskusja;
- ustalenie, jak układają się tulipany względem odcinka: róża – róża (obserwacje i pomiary).

Czynności wyobrażeniowe – projektowanie różnych sytuacji związanych z analizowanym problemem poprzez zadawanie pytań i formułowanie poleceń:

- jaką figurę utworzyłyby tulipany, gdyby było ich bardzo dużo?
- wykonaj konstrukcję obserwowanej sytuacji na kartce; zastanów się, czym można zastąpić sznurek i pinezki?
- gdzie postawić ostrą nóżkę cyrkla?
- jaką figurę utworzyły tulipany?
- zbadaj położenie obserwowanej figury względem odcinka: róża – róża (w celu odkrycia prostopadłości i przechodzenia przez środek).

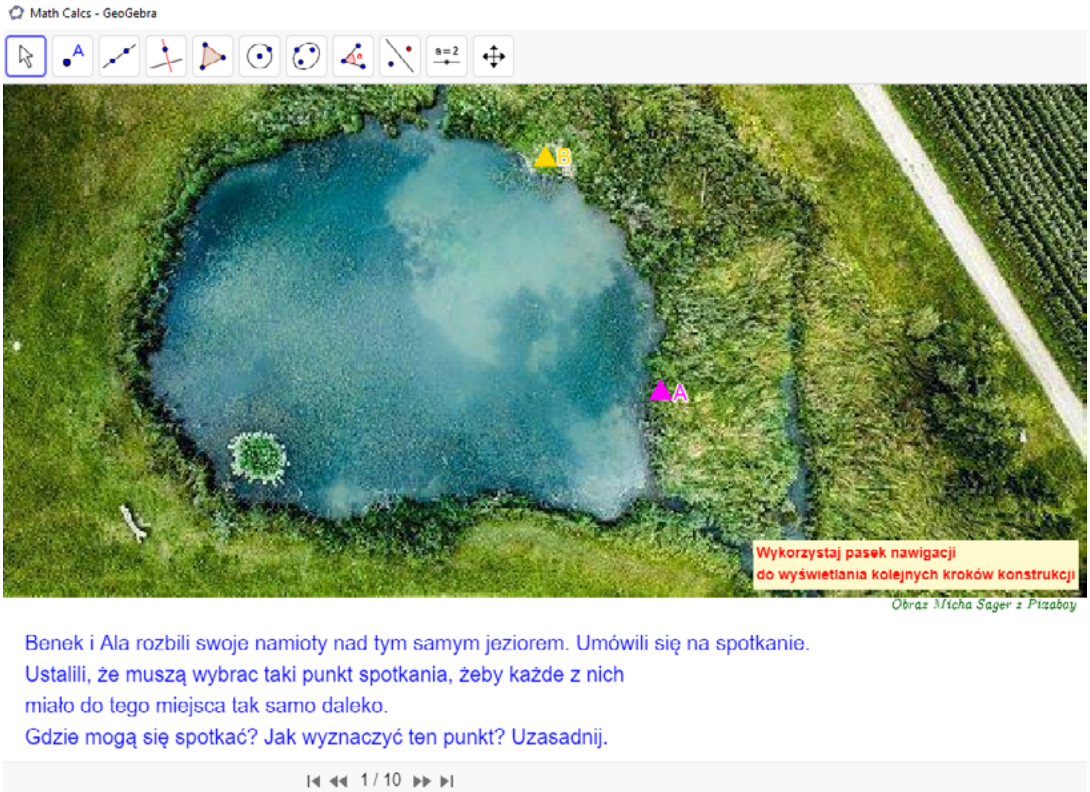
Efekt: nazwanie poznanego pojęcia: *symetralna odcinka*, zapisanie jego definicji i określenie własności.

Czynności abstrakcyjne

Zadanie 1.
Dany jest odcinek AB. Skonstruuj symetralną tego odcinka. Uzasadnij, że skonstruowana prosta spełnia definicję symetralnej.

Zadanie 2.
Ala i Benek umówili się na spotkanie. Chcieliby spotkać się w miejscu, do którego każde z nich ma równie daleko. Zaproponuj Ali i Benkowi miejsce spotkania. Ile jest możliwych miejsc spotkania? Rozwiązując zadanie, wykorzystaj program GeoGebra: https://www.geogebra.org/classic/vqkpkzeb [dostęp: 14.04.2025].

Rys. 3. Grafika do apletu wykonanego w programie Geogebra



Źródło: opracowanie własne

Efektem takiej lekcji powinno być zapamiętanie przez uczniów następujących własności prostej nazywanej *symetralną odcinka*:

- jest zbiorem punktów równo oddalonych od końców odcinka;
- jest prostopadła do odcinka;
- przechodzi przez środek odcinka.

Trudnym i abstrakcyjnym pojęciem dla wielu uczniów okazuje się wysokość (trójkąta, równoległoboku, trapezu) – szczególnie wówczas, gdy trzeba wykreślić wszystkie wysokości, np. w trójkątach rozwartokątnych, prostokątnych, równoległobokach. Warto zatem stwarzać sytuacje, w których uczniowie mogą samodzielnie odkryć to pojęcie i poprawnie zbudować związaną z nim intuicję.

Czynnościowa metoda nauczania matematyki to sposób zaangażowania uczniów w działanie, współpracę, dyskusje, podczas których mimochodem rozwijają: krytyczne myślenie, kreatywność, umiejętności komunikacyjne i kooperację – czyli wszystkie cztery kluczowe kompetencje XXI wieku.

4.2. Filozofia uczenia się matematyki z wykorzystaniem Map Rozwiązywania Problemów (TOC)

TOC (skrót od angielskiej nazwy *theory of constraints* czyli teoria ograniczeń) to program, który pozwala na rozpoznanie ograniczeń występujących w otaczającym nas świecie i skuteczne zarządzanie nimi. Za twórcę teorii TOC uznaje się dr. Eliyahu Goldratta – fizyka, lidera biznesowego, który w latach 70-tych XX w. opracował tę metodę dla biznesu. W 1995 r. powstała fundacja „TOC dla Edukacji", a od 2006 r. narzędzia TOC są wykorzystywane również w Polsce[5].

Metodę *Problem Solving Maps* (PSM), czyli Mapy Rozwiązywania Problemów (MRP), opracował dr Danilo Sirias, prof. matematyki na Wydziale Zarządzania i Marketingu w Sagina w Valley University w Stanach Zjednoczonych, wieloletni trener TOC. Wyjaśnia on następująco założenia tego podejścia: „Chodzi o to, że jeśli zastosujemy tę samą metodę do nauki kilku tematów, uczniowie zaczną uczyć się zarówno treści, jak i procesu rozwiązywania problemów jednocześnie. W związku z tym, że PSM rozbijają problemy matematyczne na mniejsze, łatwiejsze do przyswojenia części, uczniowie mogą skupić się na rozwiązywaniu fragmentu procedury, bez przytłaczania ich całością problemu. To z kolei powoduje, że zyskują pewność siebie, aby mogli swobodnie wykonać następny krok. W efekcie zostaje zwiększona ich wydajność"[6].

Zaproponowane przez niego mapy opierają się na podstawowych narzędziach TOC, takich jak: chmura, gałąź logiczna, drzewko ambitnego celu.

Tab. 1. Zależności między Mapami Rozwiązywania Problemów (MRP) a narzędziami TOC (*theory of constraints*)

Narzędzie TOC	Mapa Rozwiązywania Problemów	Korzyści ze stosowania Map Rozwiązywania Problemów
Chmura	**„przykład – wniosek"**	Uczniowie samodzielnie odkrywają reguły matematyczne na podstawie analizy przykładów podanych przez nauczyciela. Dzięki temu **rozwijają umiejętność logicznego myślenia i formułowania własnych wniosków**, co sprzyja głębszemu zrozumieniu materiału. Efekt końcowy stanowi przykład podany przez uczniów.
Gałąź logiczna	**„gałąź wielu reguł"**	Uczniowie analizują różne reguły matematyczne, które mogą zostać zastosowane w kontekście konkretnego zadania. Wybierając i nazywając te reguły, uczą się nie tylko ich stosowania, ale także rozumienia, jaką regułę należy przywołać, aby uzasadnić swój tok rozumowania. To **rozwija ich zdolności w zakresie krytycznego myślenia**.

[5] Polecam zasoby internetowe dotyczące TOC: *Mapy Rozwiązywania Problemów | TOC dla Edukacji – Myślenie krytyczne, Rozwiązywanie problemów, Jak uczyć myślenia, Myślenie logiczne*.

[6] Cyt. za: *Mapy Rozwiązywania Problemów* – artykuł na stronie www.toc.edu.pl: https://www.toc.edu.pl/narzedzia-krytycznego-myslenia/mapy-rozwiazywania-problemow/ [dostęp: 20.03.2025].

Narzędzie TOC	Mapa Rozwiązywania Problemów	Korzyści ze stosowania Map Rozwiązywania Problemów
Drzewko ambitnego celu	**„łamacz matematyczny"**	Uczniowie dzielą złożone problemy na mniejsze, bardziej zrozumiałe. Uczą się tworzyć unikalne strategie, co **rozwija ich kreatywność i umiejętność rozwiązywania problemów**.

Źródło: opracowanie własne

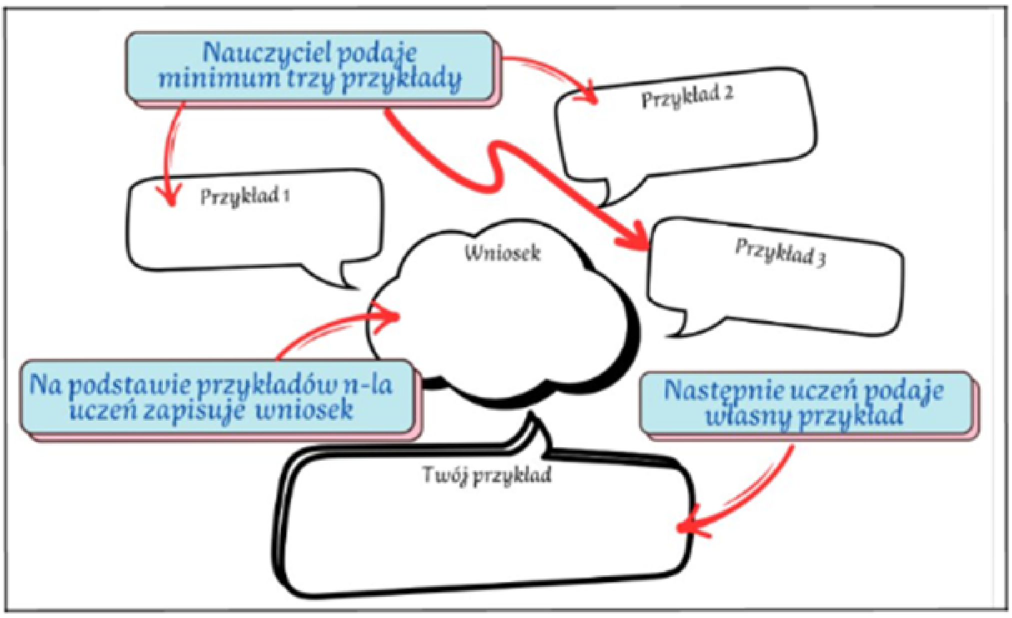
Tab. 2. Sytuacje dydaktyczne, w których warto stosować Mapy Rozwiązywania Problemów

Hierarchia wiedzy	Proces myślowy	Mapy Rozwiązywania Problemów
Pojedyncze reguły	Wskazywanie prawidłowości **(myślenie indukcyjne)**	**„przykład – wniosek"**
Złożone problemy	Zastosowanie wielu reguł **(myślenie dedukcyjne)**	**„gałąź wielu reguł"**
Skomplikowane zadania problemowe	Dzielenie problemów na mniejsze składowe **(tworzenie strategii rozwiązania problemu)**	**„łamacz matematyczny"**

Źródło: opracowanie własne

W dalszej części tekstu przedstawione zostały sposoby konstruowania poszczególnych map oraz przykłady ich wykorzystania na lekcjach matematyki.

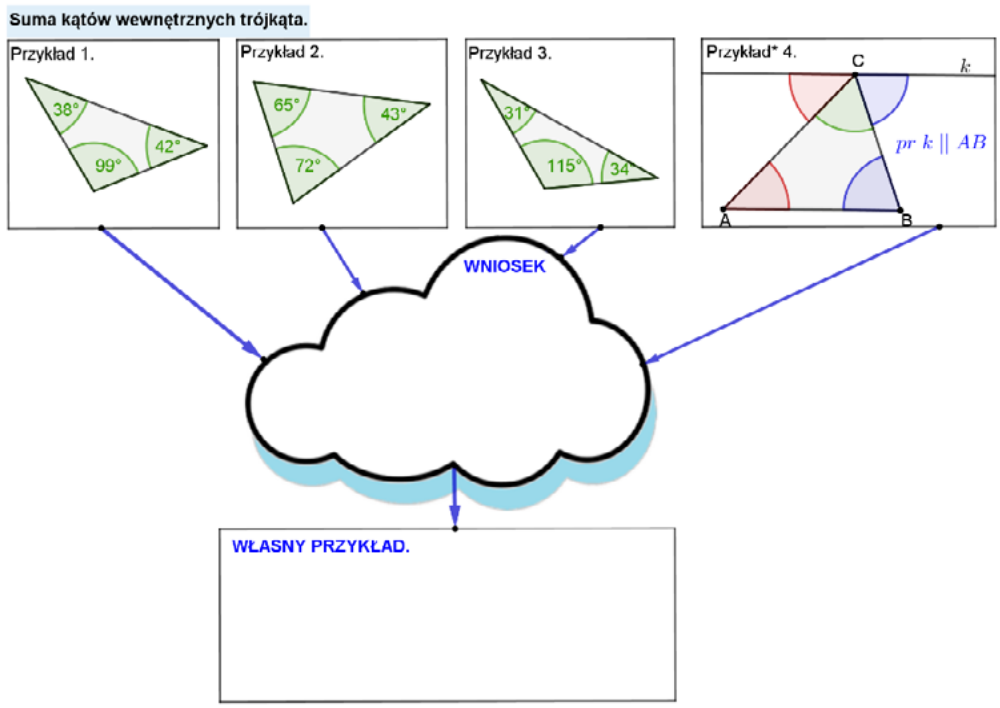
Rys. 4. Schemat Mapy Rozwiązywania Problemów typu „przykład – wniosek"



Źródło: opracowanie własne

Poniżej zaprezentowano przykładową konstrukcję i wykorzystanie mapy typu „przykład – wniosek" na lekcji geometrii. Rysunek 5. dotyczy lekcji poświęconej odkrywaniu własności kątów wewnętrznych trójkąta. Warto przygotować dla uczniów dwa warianty takiej mapy. Dla jednej grupy uczniów – z trzema przykładami, dla drugiej grupy – z czterema. Tę drugą wersję na pewno warto polecić uczniom uzdolnionym matematycznie i na zakończenie pracy z mapami poprosić ich o przedstawienie uzasadnienia analizowanej własności. Taka taktyka może sprawić, że nikt na lekcji nie będzie się nudził i każdy odczuje satysfakcję z wykonanej pracy – temu właśnie służy indywidualizacja.

Rys. 5. Praktyczne zastosowanie Mapy Rozwiązywania Problemów typu „przykład – wniosek"



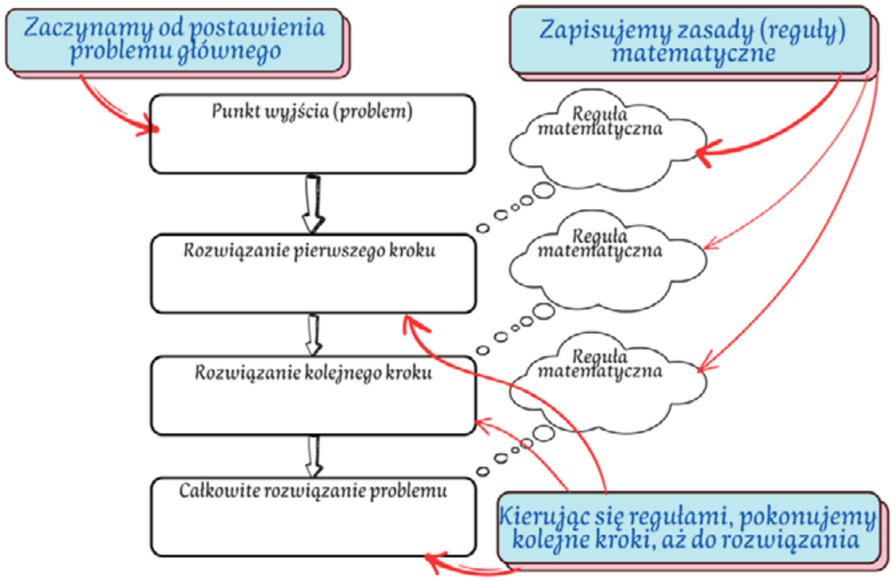
Źródło: opracowanie własne

Analizując korzyści ucznia płynące z zastosowania tego rozwiązania, można wskazać następujące **zalety mapy „przykład – wniosek"**:

- **uczy wyciągania wniosków** na podstawie podanych przykładów;
- **angażuje ucznia** w zadanie – ma on poczucie, że staje się odkrywcą;
- **wymaga samodzielnej pracy** ucznia, której efekty na dłużej pozostają w jego pamięci;
- zmusza do formułowania wniosków – reguły **zdefiniowane własnymi słowami** są **łatwiejsze do zapamiętania**;
- **słabszym uczniom pomaga odzyskać wiarę** we własne możliwości – matematyka wydaje im się bardziej zrozumiała.

„Gałąź wielu reguł" – to mapa, która pomaga uczniom przyzwyczaić się do komentowania i uzasadniania kolejnych kroków w rozwiązaniu zadania, a w rezultacie niweluje strach przed zadaniami typu: „Wykaż, że…".

Rys. 6. Schemat Mapy Rozwiązywania Problemów typu „gałąź wielu reguł"



Źródło: opracowanie własne

Korzystając z tego rozwiązania, nauczyciel może, podobnie jak w przypadku poprzedniego modelu, przygotować na lekcję dwie wersje mapy – taką jak zaprezentowana na rysunku 7. oraz taką, w której zostaną wypełnione tylko okienka w kolumnie „reguła", a zadaniem ucznia będzie uzupełnienie kolumny zatytułowanej „kolejne kroki". Jeśli uczniowie już potrafią pracować z tego typu materiałem, można polecić im samodzielne opracowanie mapy do zadania zaprezentowanego na rysunku 7., z zastosowaniem własnej strategii rozwiązania, a później porównać mapy uczniowskie z mapą zaproponowaną przez nauczyciela.

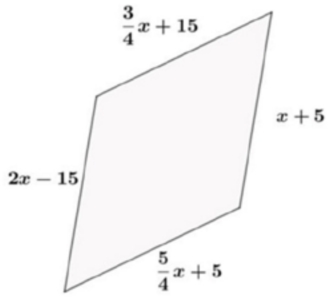
Używając mapy przedstawionej na rysunku 8., nauczyciel może zwrócić uwagę uczniów na konieczność rozumienia i stosowania ważnych matematycznych praw. Rysunek 9. prezentuje natomiast sposób wykorzystania różnych wersji mapy do indywidualizowania pracy na lekcji.

Rys. 7. Wypełniona Mapa Rozwiązywania Problemów typu „gałąź wielu reguł”

GAŁĄŹ WIELU REGUŁ

Zadanie 8. (0 – 3) (test diagnostyczny dla klas I SŚ MAS_23)

Długości boków czworokąta opisano za pomocą wyrażeń algebraicznych tak, jak pokazano na rysunku.



Uzasadnij, że jeśli obwód tego czworokąta jest równy 110 cm, to jest on równoległobokiem. Zapisz obliczenia.

KOLEJNE KROKI	REGUŁA
$2x - 15 + \frac{5}{4}x + 5 + x + 5 + \frac{3}{4}x + 15 = 110$	Obwód wielokąta to …
x = 20	Rozwiązać równanie tzn. …
$2x - 15 = 25$ $\frac{5}{4}x + 5 = 30$ $x + 5 = 25$ $\frac{3}{4}x + 15 = 30$	Aby obliczyć wartość wyrażenia algebraicznego dla x=20 należy …
Długości boków czworokąta po kolei: 25, 30, 25, 30.	
Wniosek: Dany czworokąt jest równoległobokiem, ponieważ …	**Wniosek** kończący rozwiązanie zadania typu „udowodnij, że wskazuje na to, że …

Źródło: opracowanie własne

Rys. 8. Przykład zastosowania mapy „gałąź wielu reguł" wypełnionej przez nauczyciela

Zadanie:
Magda zebrała ¾ litra jagód, Tomek 1 i 1/3 litra, a Małgosia 1 i ¼ litra. W domu dzieci wsypały zebrane jagody do miski.
Mama wykorzystała 2/5 zebranych jagód do ciasta, które upiekła na deser. Ile litrów jagód zostało w misce?

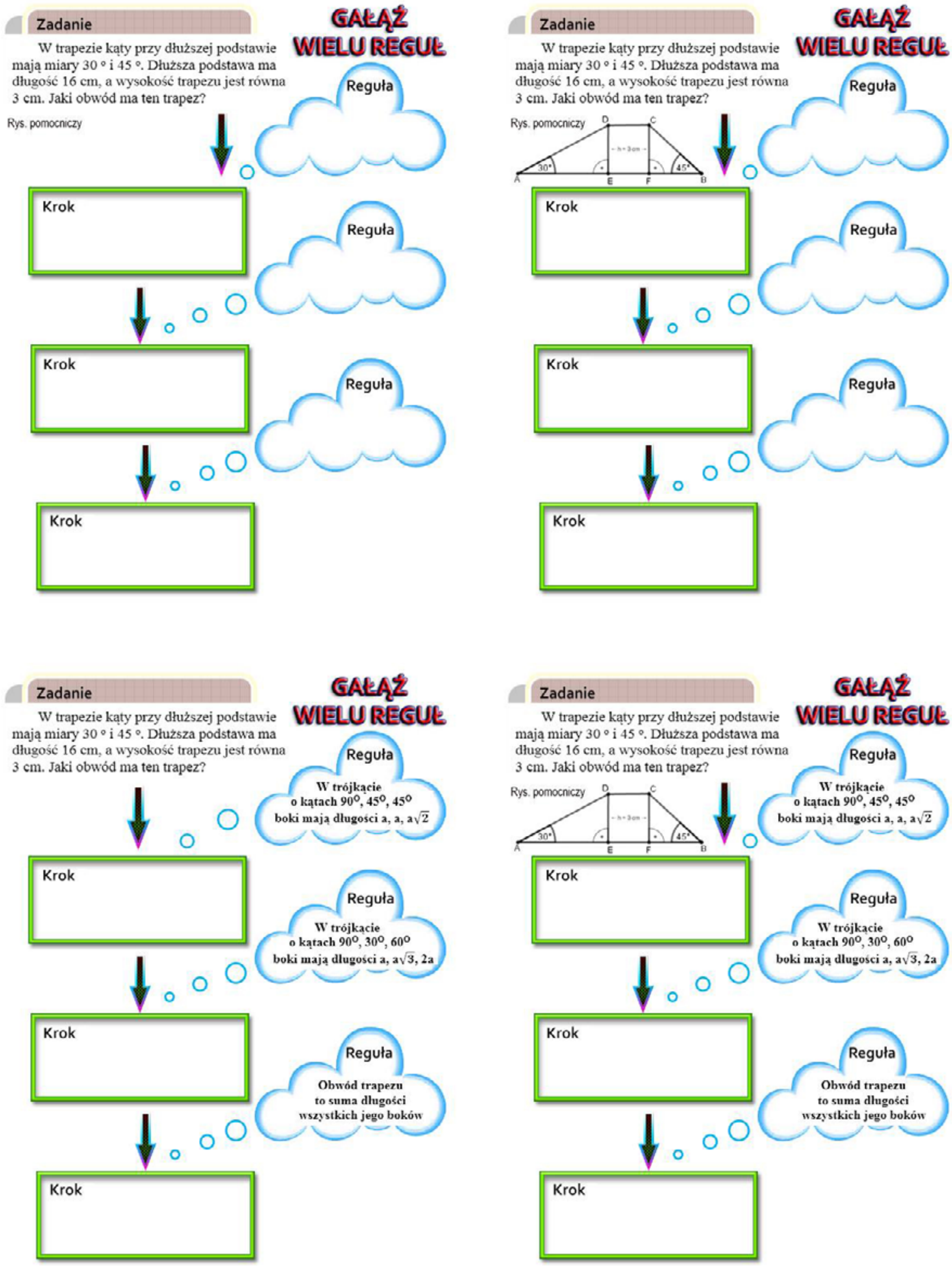
Zastosowanie GAŁĘZI WIELU REGUŁ

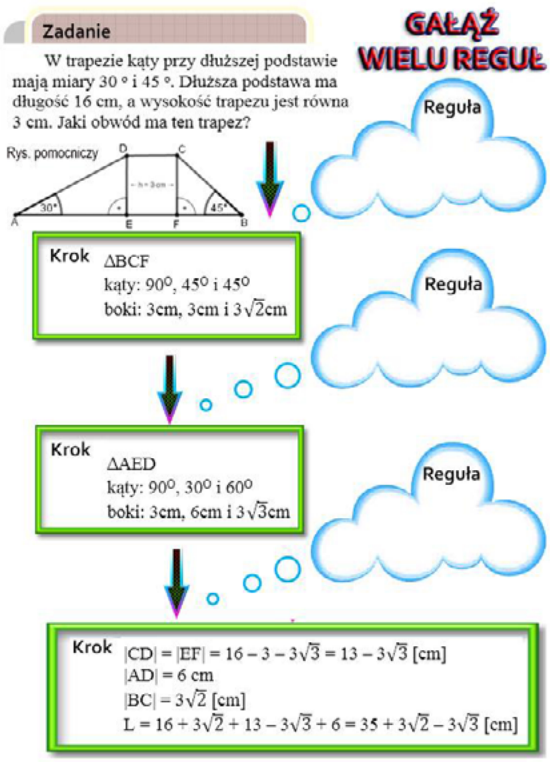
Obliczenia	Reguły
$\frac{3}{4}+1\frac{1}{3}+1\frac{1}{4}=2+1\frac{1}{3}=3\frac{1}{3}\ [litra]$	Dodawanie jest przemienne i łączne: $a+b+c=(a+c)+b$
$\frac{2}{5}\cdot\left(3\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{\frac{5}{5}}\cdot\frac{\frac{10}{5}}{3}=\frac{4}{3}\ [litra]$	Aby obliczyć ułamek z liczby należy pomnożyć ułamek przez liczbę. *Podczas mnożenia liczby mieszane zamieniamy na ułamki niewłaściwe i odpowiednio skracamy (jeśli to możliwe).*
$3\frac{1}{3}-\frac{4}{3}=3\frac{1}{3}-1\frac{1}{3}=2\ [litry]$	Aby odjąć liczby mieszane najpierw odejmujemy całości, a potem części ułamkowe.

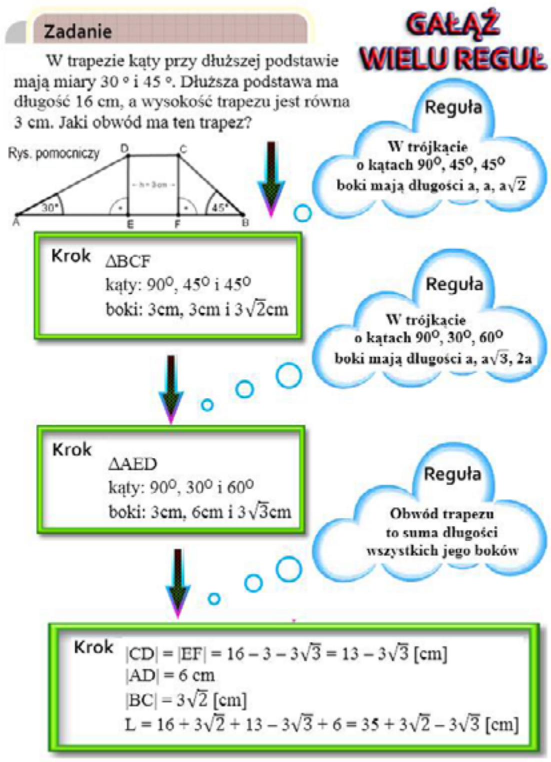
Odpowiedź: Po upieczeniu deseru w misce zostały 2 litry jagód.

Źródło: opracowanie własne

Rys. 9. Różne sposoby wykorzystania mapy „gałąź wielu reguł”







Opracowanie: Marzena Węgiełek, doradca metodyczny MSCDN Radom

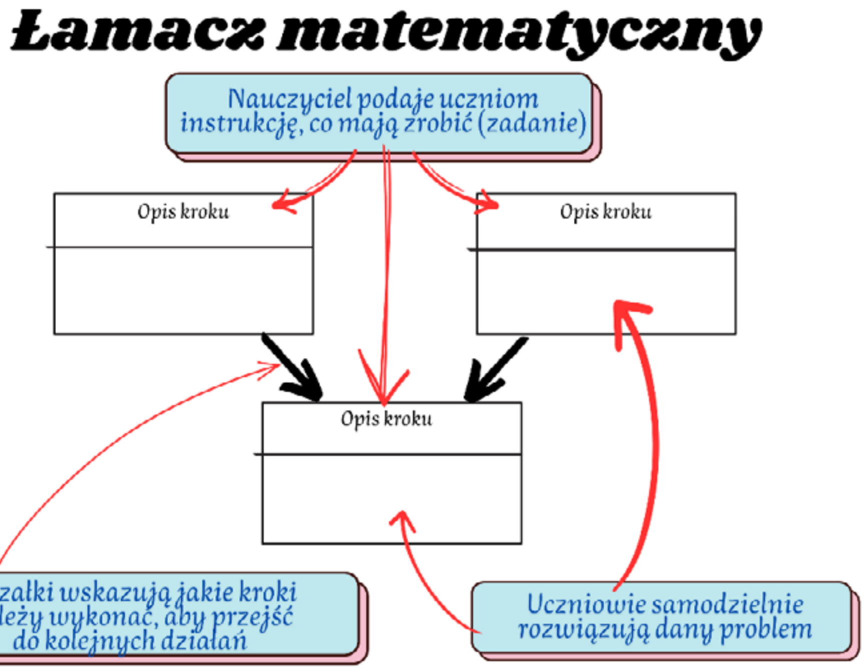
Zastosowanie „gałęzi wielu reguł” przynosi korzyści zarówno w kontekście pracy ucznia, jak i nauczyciela. Częste wykorzystanie tego narzędzia na lekcjach matematyki **pomaga nauczyć**:

- **jak samodzielnie zaprojektować rozwiązanie** zadania;
- **jak korzystać z reguł matematycznych** i zapisywać je w formie komentarzy do kolejnych kroków rozwiązania;
- **że ważny jest porządek w zapisywaniu kolejnych kroków** rozwiązania – jego utrzymanie może ustrzec przed błędami;
- **że ważna jest przemyślana kolejność wykonywania** poszczególnych działań.

Ten typ mapy jest **odpowiednim narzędziem do indywidualizowania pracy** w zróżnicowanym zespole klasowym – pozwala dostosować trudność zadań do potrzeb i możliwości każdego ucznia.

Ostatni omawiany tu typ Mapy Rozwiązywania Problemów to **„łamacz matematyczny”**. Po dokładnym zapoznaniu się z poleceniem i ustaleniu wstępnych pomysłów na rozwiązanie zadania uczeń otrzymuje od nauczyciela kartę pracy. Znajdują się na niej: polecenie, miejsca na wpisanie kolejnych kroków rozwiązania i strzałki, które podpowiadają kolejność czynności.

Rys. 10. Schemat Mapy Rozwiązywania Problemów typu „łamacz matematyczny"



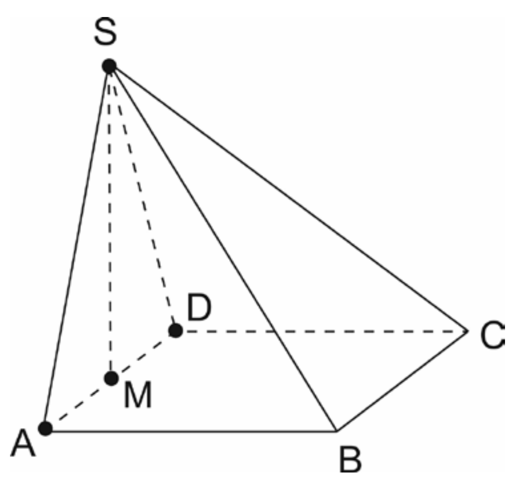
Źródło: opracowanie własne

Wykorzystanie „łamacza matematycznego" można prześledzić, rozwiązując zadanie ilustrujące jedno z wymagań zawartych w podstawie programowej matematyki dla szkoły podstawowej, które brzmi następująco:

XI.3. (Uczeń:) oblicza objętości ostrosłupów i pola powierzchni ostrosłupów prawidłowych, i takich, które nie są prawidłowe, w zadaniach nie trudniejszych niż w przykładzie:

Prostokąt ABCD jest podstawą ostrosłupa ABCDS, punkt M jest środkiem krawędzi AD, odcinek MS jest wysokością ostrosłupa.

Dane są następujące długości krawędzi: AD = 10 cm, AS = 13 cm oraz AB = 20 cm. Oblicz objętość ostrosłupa.



Przed przystąpieniem do rozwiązywania tego typu zadania warto z uczniami przeprowadzić szczegółową analizę informacji zawartych w poleceniu. Wskażą one strategię działań i pomogą dostrzec ważne elementy, na które uczniowie nie zawsze zwracają uwagę.

Aby rozwiązać zadanie, należy[7]:
- ustalić długość odcinka AM;
- zauważyć i uzasadnić, że wysokość ostrosłupa jest wysokością ściany bocznej;
- zauważyć i uzasadnić, że trójkąt ADS jest równoramienny;
- zauważyć i uzasadnić, że trójkąt AMS jest prostokątny;
- zastosować twierdzenie Pitagorasa w trójkącie AMS;
- obliczyć długość odcinka MS;
- obliczyć pole podstawy ostrosłupa;
- ustalić sposób obliczenia objętości ostrosłupa;
- obliczyć objętość ostrosłupa.

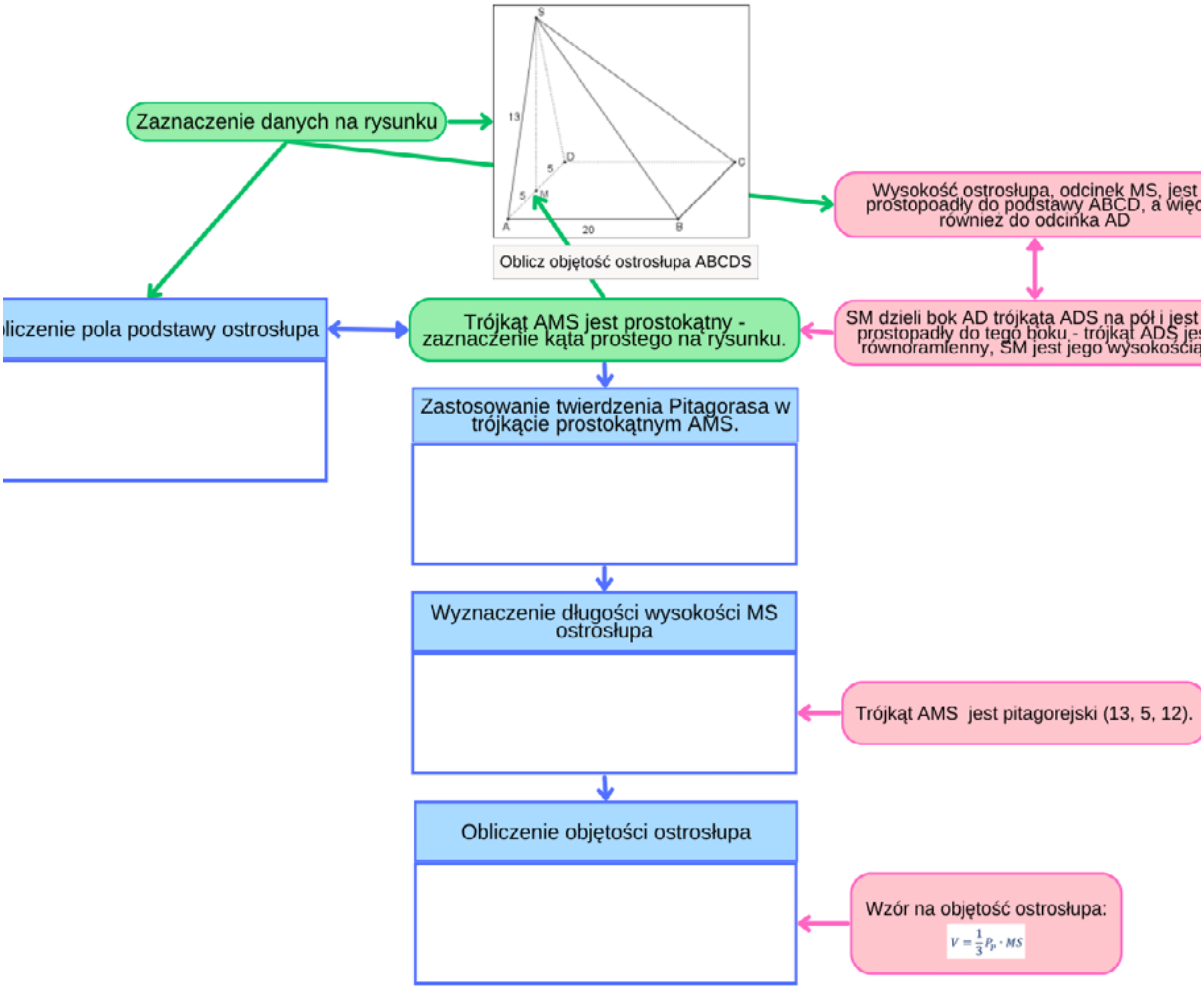
Tab. 3. Wykaz ważnych czynności podczas rozwiązywania zadania

Czynności, z których każda może być wykonana jako pierwsza	Spostrzeżenia, które należy skomentować (uzasadnić)
Obliczenie długości odcinka AM	Wysokość ostrosłupa jest wysokością ściany bocznej ADS.
Obliczenie pola podstawy ostrosłupa	Trójkąt ADS jest równoramienny.
Zapisanie sposobu obliczenia objętości ostrosłupa	Trójkąt AMS jest prostokątny.

Źródło: opracowanie własne

[7] Zob. Praca zbiorowa, (2021), *Egzamin ósmoklasisty w 2021 roku. Vademecum nauczyciela. Matematyka*, Warszawa: Ośrodek Rozwoju Edukacji.

Rys. 11. Połączenie map „łamacz matematyczny” i „gałąź wielu reguł” w kontekście analizowanego zadania



Źródło: opracowanie własne

Uczniowie i nauczyciele bez trudu mogą dostrzec **korzyści ze stosowania „łamacza matematycznego”**. Zadanie z obszernym, złożonym poleceniem często przeraża i zniechęca, ale ten sam problem analizowany z wykorzystaniem „łamacza” wydaje się możliwy do rozwiązania.

Dzięki stosowaniu tego narzędzia uczniowie:

- potrafią **przetwarzać dużą ilość informacji** zawartych w poleceniu;
- umieją **podzielić problem na mniejsze części**;
- uczą się **opracowywania strategii** rozwiązywania zadania;
- czują się zmotywowani do podjęcia wyzwania, ponieważ karta pracy z zadaniem podzielonym na kolejne kroki **ułatwia rozwiązywanie**;
- **odzyskują wiarę** we własne możliwości, nawet gdy matematyka nie jest ich mocną stroną.

Nauczyciel natomiast ma interesujące **narzędzie do indywidualizowania pracy** na lekcji.

4.3. Uczenie się we współpracy metodą JIGSAW

Metoda JIGSAW (metoda puzzli) zakłada uczenie się oparte na współpracy i rozwijaniu umiejętności komunikacyjnych. Sprzyja współdziałaniu, rozwija umiejętność kooperacji w zespole, propaguje wzajemną wymianę informacji i doświadczeń, intensyfikuje naukę, wzmacnia motywację uczniów i zwiększa ich poczucie sprawczości. Została ona opracowana na początku lat 70-tych XX w. Jej twórcą jest Elliot Aronson[8].

Organizacja pracy na lekcji metodą JIGSAW
Praca metodą JIGSAW wykonywana jest w grupach zadaniowych. W zależności od liczby uczniów w klasie nauczyciel organizuje pracę w kilkuosobowych grupach – po 4, 5 lub 6 uczniów w grupie. Każda grupa otrzymuje identyczny pakiet zadań – może to być 4–6 zadań powiązanych tematyczne, albo jedno zadanie zawierające 4–6 podpunktów. Zestaw ten jest skonstruowany w taki sposób, że każdy jego składnik (pojedyncze zadanie lub podpunkt) może być realizowany niezależnie od pozostałych. Nauczyciel dla każdego ucznia przygotowuje kartę pracy z miejscami na wpisanie rozwiązań kolejnych zadań lub podpunktów. Każdy ma za zadanie nauczyć się rozwiązywania wszystkich zadań z danego pakietu.

- KROK PIERWSZY
  Nauczyciel przygotowuje pakiet zadań dla uczniów.

- KROK DRUGI
  Nauczyciel dzieli uczniów na 4–6-osobowe „grupy domowe".

- KROK TRZECI
  Nauczyciel (w porozumieniu z członkami) wyznacza jednego ucznia z każdej grupy na jej lidera. Zadaniem lidera jest czuwanie nad pracą grupy, zwracanie uwagi, aby każdy uczeń zapisał na karcie pracy rozwiązania wszystkich zadań.

- KROK CZWARTY
  Uczniowie w grupach odliczają po kolei; każdy zapisuje swój numer na karteczce post-it i przylepia ją do bluzki – w ten sposób zostają wybrani „eksperci" kolejnych zadań/podpunktów.

  Nauczyciel rozdaje uczniom w „grupach domowych" karty pracy i koperty z zadaniami – każdy uczeń otrzymuje kopertę z głównym poleceniem i częścią zadania zgodną z jego numerem eksperta. Uczniowie nie otwierają kopert.

- KROK PIĄTY
  Nauczyciel tworzy tymczasowe „grupy ekspertów", numerując je: 1, 2, 3…, i prosi, aby uczniowie z każdej „grupy domowej" dołączyli do odpowiedniej „grupy ekspertów", zgodnie z wylosowanym przez siebie numerem.

[8] Polecam: The JIGSAW classroom – stronę w języku angielskim poświęconą metodzie puzzli i jej twórcy Elliotowi Aronsonowi [dostęp: 24.11.2024].

- KROK SZÓSTY
  Uczniowie w „grupach ekspertów" czytają przynajmniej dwukrotnie polecenia do przydzielonych im części zadania i starają się je zrozumieć.

- KROK SIÓDMY
  W „grupach ekspertów" każdy uczeń indywidualnie zastanawia się nad rozwiązaniem zadania, mając jednak możliwość przedyskutowania swojego pomysłu i zmodyfikowania go w oparciu o sugestie innych członków tej grupy. Uczniowie omawiają najważniejsze elementy rozwiązania i przygotowują się do prezentacji, którą każdy z nich ma za zadanie przedstawić swojej „grupie domowej".

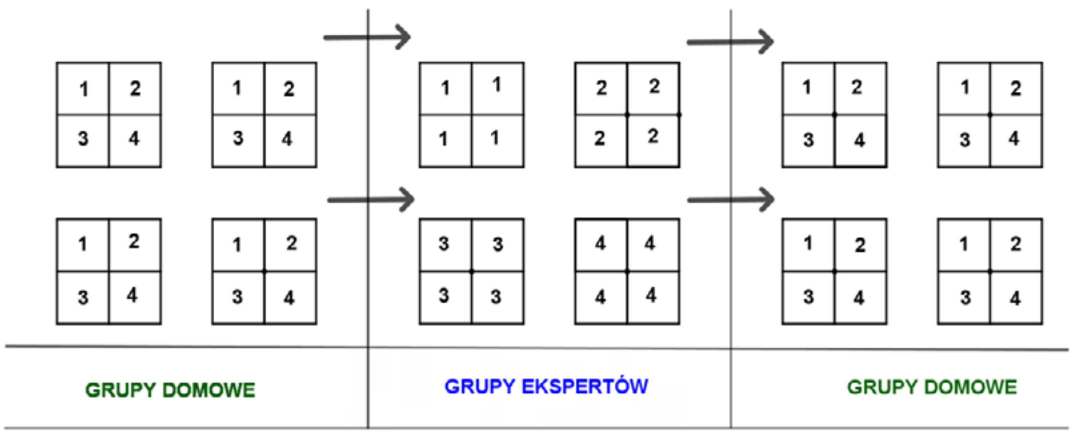
- KROK ÓSMY
  Uczniowie z poszczególnych „grup ekspertów" wracają do swoich grup „domowych".

- KROK DZIEWIĄTY
  „Eksperci" po kolei prezentują swoim „grupom domowym" rozwiązania fragmentów zadania lub podpunktów. Pozostali członkowie grupy mają możliwość zadawania pytań, mogą prosić o dodatkowe wyjaśnienia.

- KROK DZIESIĄTY
  Podczas całej lekcji nauczyciel przechodzi od grupy do grupy, obserwując pracę uczniów. Jeśli jakaś grupa ma problemy (np. któryś z członków dominuje, zakłóca spokój lub nie angażuje się w pracę), nauczyciel wyciąga konsekwencje albo podpowiada odpowiedni sposób interwencji liderowi grupy.

- KROK JEDENASTY
  Na koniec sesji nauczyciel przeprowadza quiz lub kartkówkę w celu sprawdzenia poziomu opanowania przez uczniów omówionego materiału albo przekazuje im analogiczny pakiet zadań do samodzielnego rozwiązania.

Rys. 12. Organizacja pracy metodą JIGSAW



Źródło: opracowanie własne

Pracę metodą JIGSAW warto stosować na lekcjach podsumowujących, ćwiczeniowych, powtórzeniowych. Jest wówczas szansa na zaangażowanie w pracę każdego ucznia w motywujący dla niego sposób. Uczeń nie „odpisuje" zadania od kolegi, ale uczestniczy w jego rozwiązywaniu, a prezentując fragment rozwiązania kolegom, utrwala własną wiedzę i trenuje umiejętności komunikacyjne. Zawsze może też liczyć na wsparcie kolegów z grupy.

Karta pracy z wykorzystaniem metody JIGSAW[9]

Temat lekcji: Obliczanie pól trójkątów

Propozycje zadań dla grup

Zadanie

Polecenie dla każdego ucznia (do wykonania przed podziałem na grupy):

- Narysuj trzy dowolne trójkąty (na kolejnych trzech stronach w zeszycie uczniowie rysują u góry po jednym trójkącie, pozostawiając resztę strony pustą):
  a) trójkąt ostrokątny ABC,
  b) trójkąt prostokątny KLM,
  c) trójkąt rozwartokątny PQR.

Zestaw poleceń dla grup ekspertów (każdy ekspert otrzymuje kartę pracy z narysowanym odpowiednim trójkątem oraz z tabelą do wypełnienia):

- Wykreśl w każdym z trójkątów wszystkie wysokości.
- Zapisz wzory na obliczenie pól powierzchni każdego z trójkątów.
- Zmierz potrzebne odcinki i oblicz trzema sposobami pola wszystkich trójkątów.

Zestawy zadań dla ekspertów

Ekspert 1.

- Narysuj trójkąt ostrokątny ABC na odwrotnej stronie karty pracy. Oznacz jego boki: *a*, *b*, *c*.
- Narysuj **wszystkie wysokości** w trójkącie ostrokątnym ABC.
- Zapisz **trzy wzory** na pole trójkąta ostrokątnego.
  – wzór 1: ....
  – wzór 2: ....
  – wzór 3: ....
- **Zmierz** potrzebne odcinki i **oblicz trzema sposobami pole trójkąta** ostrokątnego.

Nazwa odcinka	**Długość odcinka**	**Pole trójkąta**
odcinek BC: a	$a =$	
h_a	$h_a =$	
odcinek AC: b	$b =$	
h_b	$h_b =$	
odcinek AB: c	$c =$	
h_c	$h_c =$	

[9] Opracowanie własne.

Ekspert 2.

- Narysuj trójkąt prostokątny KLM na odwrotnej stronie karty pracy. Oznacz jego boki: *k*, *l*, *m*.
- Narysuj **wszystkie wysokości** w trójkącie prostokątnym KLM.
- Zapisz **trzy wzory** na pole trójkąta prostokątnego.
  - wzór 1: ....
  - wzór 2: ....
  - wzór 3: ....
- **Zmierz** potrzebne odcinki i **oblicz trzema sposobami pole trójkąta** prostokątnego.

Nazwa odcinka	**Długość odcinka**	**Pole trójkąta**
odcinek LM: k	$k =$	
h_k	$h_k =$	
odcinek KM: l	$l =$	
h_l	$h_l =$	
odcinek KL: m	$m =$	
h_m	$h_m =$	

Ekspert 3.

- Narysuj trójkąt rozwartokątny PQR na odwrotnej stronie karty pracy. Oznacz jego boki: *p*, *q*, *r*.
- Narysuj **wszystkie wysokości** w trójkącie rozwartokątnym PQR.
- Zapisz **trzy wzory** na pole trójkąta rozwartokątnego PQR.
  - wzór 1: ....
  - wzór 2: ....
  - wzór 3: ....
- **Zmierz** potrzebne odcinki i **oblicz trzema sposobami pole trójkąta** rozwartokątnego PQR.

Nazwa odcinka	**Długość odcinka**	**Pole trójkąta**
odcinek QR: p	$p =$	
h_p	$h_p =$	
odcinek PR: q	$q =$	
h_q	$h_q =$	
odcinek PQ: r	$r =$	
h_r	$h_r =$	

Uczniowie bardzo lubią ten sposób pracy. Szybko zdają sobie sprawę, że „puzzlowe sesje" to nie tylko atrakcyjna praca w grupach. Sprawia im przyjemność przechodzenie od roli odkrywcy (w którą wchodzą, gdy muszą w zespole ekspertów rozwiązać dany fragment zadania i zrozumieć wykonywane działania) do roli nauczyciela (odgrywanej, gdy trzeba nauczyć koleżanki i kolegów z pierwotnej grupy). Zyskują poczucie, że każdy z nich jest ważny w procesie wspólnego uczenia się.

4.4. Model „uczenia się przez doświadczenie"

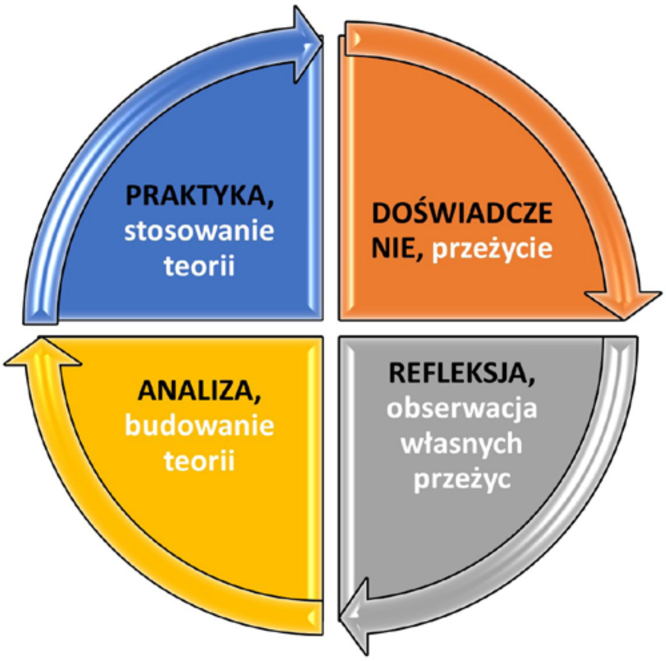
Cykl Kolba: doświadczyć ➜ przeanalizować ➜ zrozumieć ➜ wyćwiczyć

John Dewey oraz David Kolb[10], chcąc zapewnić uczniom o różnych preferencjach sensorycznych jak najwyższą jakość uczenia się, opracowali **metodę dydaktyczną zwaną cyklem Kolba**, w której wyróżnili 4 etapy uczenia się:

1) Etap doświadczenia (dla aktywnych),
2) Etap refleksji (dla refleksyjnych),
3) Etap teorii (dla teoretyków),
4) Etap zastosowania (dla pragmatyków).

Każdy kolejny etap jest niezbędny, wynika z poprzedniego, ale także stanowi wstęp do kolejnego. Ważne, aby uczący się przechodził po kolei wszystkie fazy cyklu, rozpoczynając go w dowolnym momencie. Nauczanie tą metodą wymaga przeznaczenia czasu na pracę indywidualną, współpracę i pracę zespołową.

Rys. 13. Cztery etapy cyklu Kolba



Źródło: Opracowanie własne

DOŚWIADCZENIE – przeżycie:

- wykonaj eksperyment – dokonaj obserwacji, zanotuj spostrzeżenia;
- obejrzyj krótkie nagranie wideo polecone przez nauczyciela – zapisz wnioski;
- obejrzyj film – odpowiedz na pytania w nim zawarte;

[10] Ciurej K., (2023), *Co ma wpływ na uczenie się, czyli jak działać, by dać uczniom szansę efektywnie się uczyć?* – artykuł na stronie projektu „Lekcja: Enter": https://lekcjaenter.pl/blog/co-ma-wplyw-na-uczenie-sie-czyli-jak--dzialac-by-dac-uczniom-szanse-efektywnie-sie-uczyc [dostęp: 24.11.2024].

- przeczytaj artykuł, książkę, materiał z podręcznika na podany temat;
- przeprowadź z kimś (np. kolegą, rodzicem) dyskusję dotyczącą tego problemu.

REFLEKSJA – obserwacja własnych przeżyć:
Zastanów się:
- Co się wydarzyło?
- Co w konkretnym „przeżyciu" ci się podobało?
- Co spowodowało Twój dyskomfort (okazało się trudne, niezrozumiałe)?
- Jakie emocje wywołała u Ciebie dana sytuacja?
- Czy potrafisz przedstawić hipotezy na temat wyników podobnych eksperymentów?
- Czy rozmawiałeś z kimś o tym (filmie, eksperymencie, książce, artykule…)?

ANALIZA – konstruowanie teorii:
Zastanów się:
- Czy już kiedyś spotkałeś się z tym lub analogicznym problemem?
- Czy posiadasz jakąś wiedzę na ten temat?
- Czy mógłbyś teraz skorzystać z wiedzy, którą posiadasz?
- Jakie wnioski z obserwacji doświadczenia możesz wyciągnąć?

PRAKTYKA – stosowanie teorii:
- Zastosuj nową wiedzę, rozwiązując polecone ćwiczenia/zadania.
- Rozglądając się dookoła, poszukaj problemów lub sytuacji, w których możesz zastosować nowe umiejętności.
- Czy praktyka pozwoliła Ci zweryfikować teorię?
- Czy jesteś w stanie sformułować nowe hipotezy? (Jeśli tak, przejdź przez kolejne etapy cyklu).

Niejednokrotnie nauczyciel rozpoczyna lekcje matematyki od wprowadzenia nowej teorii. Warto scedować ten obowiązek na uczniów. W tym celu pomocny może okazać się model lekcji odwróconej z zastosowaniem cyklu Kolba:
1) Uczniowie w domu samodzielnie **zapoznają się z TEORIĄ** – np. oglądając krótki film nagrany przez nauczyciela;
2) Podczas zajęć nauczyciel pozwala uczniom na **zastosowanie teorii w PRAKTYCE** – poprzez wykonywanie zadań typowych;
3) Pozostały czas lekcji przeznaczony jest na **DOŚWIADCZANIE** – **rozwiązywanie zadań różnymi sposobami**, stawianie hipotez;
4) Na ostatnim etapie uczniowie **dokonują REFLEKSJI** – zastanawiając się nad tym, co zaobserwowali, czego się dowiedzieli i nauczyli;
5) Na podstawie obserwacji i odkryć nauczyciel pomaga uczniom **sformułować nową TEORIĘ**…

Nie nauczamy po to, aby powiększać zasób wiedzy teoretycznej uczniów, ale po to, aby potrafili z pomocą tej wiedzy rozwiązywać różne praktyczne problemy. Dzięki stosowaniu teorii w praktyce (rozwiązywanie zadań, realizacja mniejszych lub większych projektów: dokonywanie zakupów, oszczędzanie w banku, projektowanie ogrodzenia działki itp.) uczniowie budują swoje umiejętności.

Aby nauczanie zgodne z koncepcją Kolba było skuteczne, nie należy ograniczać się do realizacji jednego lub dwóch etapów. Poszczególne fazy nie muszą zajmować dużo czasu – ważne jest jednak, aby wszystkie z nich pojawiły się w danym cyklu.

Przykład lekcji poprowadzonej zgodnie z cyklem Kolba[11]

1) Matematyczne doświadczenie

Problem 1

- Oblicz jak najszybciej: $7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 = \dots$.
- W jaki sposób wykonałeś obliczenia?
- Jak nazywa się wyrażenie, którego wartość obliczyłeś?
- Jak nazywamy liczby występujące w tym działaniu?
- Jaka najmniejsza liczba elementów może tworzyć sumę? A jaka jest największa liczba elementów składających się na sumę?
- Co pomogło Ci w szybkim obliczeniu? Dlaczego?
- Jak zapisałbyś wynik działania: $7 + 7 + 7 + \dots + 7 = \dots$, gdybyś wiedział, że tych siódemek jest n?

Wówczas powiemy, że to działanie ma $n = \dots$ *(składników).*

Wniosek: Iloczyn $n \cdot a$ jest równy …………… *(sumie zbudowanej z n składników równych a).*

Podsumowanie: Mnożenie, to ……………… *(skrócony zapis dodawania takich samych składników).*

Problem 2

- Oblicz jak najszybciej: $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = \dots$
- W jaki sposób wykonałeś obliczenia?
- Czy teraz podałeś wynik tak samo szybko jak podczas rozwiązywania problemu 1?
- Jak nazywa się wyrażenie, którego wartość teraz obliczyłeś?
- Jak nazywamy liczby występujące w tym wyrażeniu?
- Czy już kiedyś spotkałeś się z takim problemem?
- Czy posiadasz jakąś wiedzę na ten temat?
- Czy mógłbyś teraz skorzystać z wiedzy, którą posiadasz?
- Jak zapisałbyś wynik działania: $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 3 = \dots$, gdybyś miał pomnożyć n trójek? Jaką liczbą może być n?

Wówczas powiemy, że to działanie ma $n = \dots$

- Czy do tych rozważań przydała Ci się analiza pierwszego problemu?
- Co te dwa problemy mają wspólnego? Czym się różnią?

[11] Źródło: opracowanie własne.

2) Matematyczna refleksja

- Czego przed chwilą doświadczyłem?
- Jak się czułem?
- Czy to mi się podobało/nie podobało?
- Czy kiedyś się nad tym zastanawiałem?
- Kiedy poznałem mnożenie? Czy wówczas myślałem o nim tak jak teraz?
- Czy wiedza, którą przed chwilą zdobyłem, do czegoś mi przyda?

3) Matematyczna teoria

- Wniosek: Iloczyn $a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ jest równy a^n, gdy czynników w tym mnożeniu jest *n*, gdzie $n \in Z, n \geq 2, a \in R$. Takie wyrażenie nazywamy potęgą o podstawie *a* i wykładniku *n*.
- Podsumowanie: Potęga – to skrócony zapis mnożenia takich samych czynników.
- Czy myślałeś w ten sposób o potęgowaniu?

4) Matematyczna praktyka

- Trenuj obliczanie potęg liczb rzeczywistych.
- Pamiętaj o swoich obserwacjach, zdobywając nowe doświadczenia, poszukuj uogólnień.
- Zastosuj nową wiedzę, rozwiązując wskazane ćwiczenia.
- Poszukaj sytuacji, w których możesz zastosować nowe umiejętności.
- Wykorzystaj nową wiedzę do rozwiązania problemu:

  Na szachownicy król kazał ułożyć ziarenka pszenicy wykonane ze złota w ten sposób, że na pierwszym polu polecił położyć 1 ziarenko, na drugim 2, na trzecim 4, na czwartym 8 i zgodnie z tą zasadą do końca, pokrywając całą szachownicę.
  Jak cenne byłoby złoto, gdyby pokryło całą szachownicę?
  Przyjmij, że jedno złote ziarenko: ma objętość 2 mm^3, waży 0,02 g i kosztuje 3,125 zł.

  Wykonując obliczenia, możesz skorzystać z arkusza Excel.

5. Widoczne uczenie się każdego ucznia

Jako podsumowanie tego opracowania posłuży cytat z książki Johna Hattiego: „To, czy cele edukacji i kształcenia szkolnego powinny obejmować coś więcej niż przyrost wiedzy i umiejętności, jest przedmiotem rozważań od zarania dziejów: od Platona i jego poprzedników, przez Rousseau, aż po myślicieli współczesnych. Wśród najważniejszych celów oświaty znajduje się umiejętność krytycznego myślenia. Dzięki temu obywatele będą stawiali sobie wyzwania – zarówno związane z rozwojem intelektualnym, jak i osobistym – i staną się aktywnymi, kompetentnymi i krytycznie oceniającymi sytuacje mieszkańcami złożonego świata”[12].

Przedstawione tu metody: nauczanie czynnościowe, metoda JIGSAW, wykorzystanie Map Rozwiązywania Problemów i nauczanie-uczenie się zgodne z cyklem Kolba, dają uczniom szansę na rozwijanie kompetencji – nie tylko matematycznych. Podczas lekcji opartych na tych koncepcjach nauczyciel nie odgrywa roli mówcy – jest obserwatorem, przewodnikiem, doradcą i mentorem, służy radą i pomocą. Ma możliwość obserwowania pracy wszystkich uczniów, analizowania występujących problemów i trudności oraz udzielania indywidualnej pomocy w ich pokonywaniu. Uczniowie są natomiast odkrywcami swojej wiedzy.

[12] Hattie J., (2018), *Widoczne uczenie się dla nauczycieli. Jak maksymalizować siłę oddziaływania na uczenie się*, Warszawa: CEO, s. 22.

Literatura

Hattie J., (2018), *Widoczne uczenie się dla nauczycieli. Jak maksymalizować siłę oddziaływania na uczenie się*, Warszawa: Centrum Edukacji Obywatelskiej.

Kierstein Z., (2004), *Aktywne metody w kształceniu matematycznym*, Opole: Wydawnictwo NOWIK.

Krygowska A.Z., (1977), *Zarys dydaktyki matematyki*, cz. 1., Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne.

Kubiczek B., (2009), *Metody aktywizujące. Jak uczyć uczniów uczenia się?*, Opole: Wydawnictwo NOWIK.

Wieczorkiewicz-Wiśniewska A., (2014), *Katalog kompetencji społecznych nauczyciela XXI wieku*, Mazowiecki Kwartalnik Edukacyjny „Meritum", nr 1(32)2014.

Gasik M., (2012), *Zastosowanie narzędzi myślowych TOC w rozwiązywaniu problemów wychowawczych*, Mazowiecki Kwartalnik Edukacyjny „Meritum", nr 1(24)2012.

Niemierko B., (2010), *Kształcenie szkolne. Podręcznik skutecznej dydaktyki*, Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne.

Praca zbiorowa, (2021), *Egzamin ósmoklasisty w 2021 roku. Vademecum nauczyciela. Matematyka*, Warszawa: Ośrodek Rozwoju Edukacji.

Siwek H., (1998), *Czynnościowe nauczanie matematyki*, Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne.

Siwek H., (2005), *Dydaktyka matematyki. Teoria i zastosowania w matematyce szkolnej,* Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne.

Suerken K., (2009), *Techniki aktywizujące myślenie – TOC*, Warszawa: MSCDN.

Szurek M., (2023), *Jak uczyłem pół wieku temu, ćwierć wieku temu i jak uczę teraz*, [w:] Kąkol H. i in. (red.), *Współczesne problemy nauczania matematyki. Prace monograficzne z dydaktyki matematyki*, Poznań: Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza.

Taraszkiewicz M., Colin R., (2006), *Atlas efektywnego uczenia (się) nie tylko dla nauczycieli*, cz. 1., Warszawa: Wydawnictwo Transfer Learning Solutions.

Zaremba D., (2014), *Jak tłumaczyć dzieciom matematykę?*, Gliwice: Wydawnictwo HELION.

Netografia

Ciurej K., *Uczenie się przez doświadczenie czyli praca metodą cyklu Kolba na lekcji* – artykuł na blogu projektu „Lekcja: Enter".

Sala A., Punie Y., Garkov V., Cabrera M., (2020), *LifeComp – The European framework for personal, social and learning to learn key competence*, Bruksela: European Commission: Joint Research Centre.

Winiarek M., (2020), *Różnica między rozumowaniem indukcyjnym a dedukcyjnym* – artykuł na stronie Myślenie krytyczne.

Żeromska A.K., (2020), *Nie zmiękczajcie matematyki*. *O wybranych tezach naukowych Anny Zofii Krygowskiej*, Zachodniopomorski Dwumiesięcznik Oświatowy „Refleksje", nr 2, 2020.

Zasoby internetowe TOC: *Mapy Rozwiązywania Problemów*.

The JIGSAW classroom – strona w języku angielskim poświęcona metodzie puzzli i jej twórcy Elliotowi Aronsonowi.

O autorce

Grażyna Śleszyńska – magister matematyki, absolwentka Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego. Od 1980 roku nauczycielka matematyki – najpierw w szkole podstawowej, następnie w gimnazjum, liceum i na uczelni wyższej. Od 16 lat zatrudniona jako nauczyciel konsultant w Mazowieckim Samorządowym Centrum Doskonalenia Nauczycieli.

Autorka wielu artykułów poświęconych diagnostyce edukacyjnej, pracy z uczniem uzdolnionym matematycznie i nowatorskim metodom nauczania matematyki. Autorka programów dydaktycznych i prowadząca szkolenia dla nauczycieli z zakresu oceniania motywującego, rozwijania kompetencji kluczowych, diagnozowania umiejętności uczniów, opracowywania wieloaspektowych analiz wyników diagnoz, sprawdzianów i egzaminów, wykorzystywania nowoczesnych technologii wspierających uczenie (się). Propagatorka programu GeoGebra, metod angażujących uczniów do samodzielnego odkrywania matematyki, w tym metody Myślącej Klasy. Autorka scenariuszy warsztatów i prowadząca szkolenia w projekcie „Mazowiecka Akademia Rozwoju Kompetencji Pracowników Instytucji Wspomagania”, prowadząca warsztaty dla grup nauczycieli matematyki i przedmiotów przyrodniczych w projekcie „Lekcja: Enter”.

Ośrodek Rozwoju Edukacji
Aleje Ujazdowskie 28, 00-478 Warszawa
tel. 22 345 37 00

www.ore.edu.pl